Mathematics
X

JUL 29 1938

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

Helmut Hasse

Band 179

Heft 1

Ausgegeben am 22. Juni 1938

Walter de Gruyter & Co.

[vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung / J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung / Georg Reimer / Karl J. Trübner / Veit & Comp.

Berlin 1938

Band 179. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Schmidt, Adam, Neuer Beweis eines Hauptsatzes über Bestimmtheitsstellen linearer Differentialgleichungssysteme	1
Schmid, Hermann Ludwig, Über die Automorphismen eines algebraischen Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik	5
Scholz, Arnold, Minimaldiskriminanten algebraischer Zahlkörper	16
Jonas, Hans, Über den Zusammenhang zweier Klassen viergliedriger Laplacescher Zyklen	22
Steck, Max, Grundlegung einer Theorie der reellen Inzidenzabbildungen in endlichen projektiven Geometrien. I. (Eine geometrische Deutung der zyklischen Gruppen.)	37

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgendeinem Grunde Textänderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von allen Abhandlungen 75 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion unter der Adresse:
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Helmut Hasse, Göttingen, Mathematisches Institut, Bunsenstr. 3-5.

Druck von Walter de Gruyter & Co., Berlin W 35
Printed in Germany

Neuer Beweis eines Hauptsatzes über Bestimmtheitsstellen linearer Differentialgleichungssysteme.

Von *Adam Schmidt* in Weimar.

Der klassische Satz von L. Sauvage [1]), daß die Lösungen eines Systems linearer homogener Differentialgleichungen sich an einer Stelle (im Endlichen) bestimmt verhalten, wenn die Koeffizienten dort höchstens einen Pol erster Ordnung besitzen, ist im Laufe der Zeit auf mannigfache Art bewiesen worden. Sieht man von dem Birkhoffschen Beweis [2]) ab — der keine Konstruktion der Lösung liefert — so ist noch immer die Frobeniussche Methode die bevorzugte [3]), die aber zahlreiche Fallunterscheidungen notwendig macht und bei erschöpfender Durchführung auch heute noch etwas mühsam ist.

Im Sinne der neueren Matrizenmethoden erscheint es nun naturgemäß, den Beweis durch Abspaltung des verzweigten Bestandteils zu führen, wobei aber der andere Faktor dann einer *nichtkommutativen* Matrix-Differentialgleichung genügen muß. In Spezialfällen ist dieses Verfahren von I. A. Lappo-Danilevski [4]) durchgeführt, und neuerdings hat G. Zwirner [5]) den allgemeinen Fall angegriffen; doch scheint uns sein Beweis auf Grund mehrerer Unstimmigkeiten nicht geglückt [6]). Wir geben hier einen Beweis, bei dem der Ansatz von Lappo-Danilevski und Zwirner anstatt mit der von Zwirner vorgeschlagenen Majorante durch direkte Abschätzung der Koeffizienten gerechtfertigt wird, wobei überdies — sofern nötig — eine für den Konvergenzbeweis geeignete Form durch eine algebraische Reduktion von G. Rasch [7]) hergestellt werden kann.

Für die Anregung zur Beschäftigung mit dieser Aufgabe sowie für die Vermittlung der angegebenen Literatur danke ich Herrn Hermann Schmidt-Jena.

[1]) L. Sauvage, Théorie générale des systèmes d'équation différentielles, Annales de l'Ecole Normale (3) **3** (1886), S. 389—404. Vgl. auch L. Schlesinger, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen 1908, S. 170.

[2]) Vgl. E. Hilb, Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet, Enzykl. d. math. Wissensch. II, 2, S. 471—562, insbesondere S. 485—86.

[3]) Vgl. I. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Berlin 1905, S. 141, sowie neuerdings E. Hille, On the method of Frobenius, Ann. of Math. (2) **27** (1926), S. 195—198.

[4]) I. A. Lappo-Danilevski, Résolution algorithmique des problèmes réguliers de Poincaré et de Riemann, Journ. Soc. Phys.-Math. Léningrade **2** (1928) Heft 1, S. 95—154, insbesondere S. 110—112. vgl. auch Trav. Inst. phys.-math. Stekloff, Sect. math. **2** (1935), Mém. V, § 8, S. 76—83.

[5]) G. Zwirner, La teoria delle matrici applicata ai sistemi di equazioni differenziali lineari, Rend. Sem. Mat. Padova **7** (1936), S. 55—109, insbesondere 101—105.

[6]) a) Die Gleichung (7) auf S. 102 hat keine Lösung, die sich für $z = 0$ auf die Einheitsmatrix reduziert, wenn nicht schon $A^{(0)}$ die Normalform hat. b) In der Rekursionsformel (10) fehlen rechts, falls nicht $[T_i^{(e_i)}]$ Diagonalform hat, gewisse der unbekannten Matrix $B^{(k)}$ selbst angehörige Glieder. c) Die Koeffizienten der durch (11) definierten Reihe brauchen nicht positiv zu werden.

[7]) G. Rasch, Zur Theorie und Anwendung des Produktintegrals, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **171** (1934), S. 65—119, insb. S. 116/117. Der dort (S. 115) gegebene Beweis zu Satz I erscheint uns jedoch weniger einfach als unser auf ganz anderer Grundlage beruhendes Verfahren.

In dem System linearer Differentialgleichungen

$$zy_k' = \sum_{j=1}^{n} y_j a_{jk}(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

mögen die $a_{jk}(z)$ für $z = 0$ reguläre Funktionen von z sein. Die Ermittlung eines Hauptsystems

$$y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, falls $(a_{ik}) = A$, $(y_{ik}) = Y$ gesetzt wird, gleichwertig mit der Lösung der Matrix-Differentialgleichung

$$z\frac{dY}{dz} = YA$$

unter der Zusatzbedingung

$$|Y| \not\equiv 0.$$

Ist nun $A = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu z^\nu$, so lautet der zu beweisende Satz folgendermaßen:

Satz. *Die Differentialgleichung*

$$z\frac{dY}{dz} = Y\Big(A_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu z^\nu\Big), \tag{1}$$

wo $\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu z^\nu$ *konvergent ist für* $|z| < R$, *hat eine Lösung der Form*

$$Y = z^{A^*} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu z^\nu. \tag{2}$$

Dabei ist A^* *eine konstante Matrix, während* $X = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu z^\nu$ *in einem Kreise um den Punkt* $z = 0$ *konvergiert.*

Wir setzen zunächst

$$Y = z^{A_0^*} X. \tag{3}$$

Dabei ist A_0^* die aus der Elementarteilertheorie bekannte Normalform der Matrix A_0. (Der Ansatz $A^* = A_0$ erweist sich nicht als zweckmäßig.) Sind $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $|A_0 - rE| = 0$, wobei jede Wurzel so oft zu zählen ist, wie ihre Vielfachheit angibt, so ist

$$A_0^* = \begin{pmatrix} \mathsf{A}_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \mathsf{A}_q \end{pmatrix}, \tag{4}$$

wobei

$$\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & r_2 & \cdots & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & \cdots & 1 & r_{p_1} \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} r_{p_1+1} & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & r_{p_1+2} & \cdots & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & \cdots & 1 & r_{p_1+p_2} \end{pmatrix} \text{ usw.}$$

Mindestens in jeder Teilmatrix A_j sind dabei die r_i einander gleich. Ferner ist

$$z^{A_0^*} = \begin{pmatrix} z^{\mathsf{A}_1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & z^{\mathsf{A}_q} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad z^{\mathsf{A}_1} = z^{r_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lg z & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{(\lg z)^{p_1-1}}{(p_1-1)!} & \cdots & \lg z & 1 \end{pmatrix} \text{ usw.,}$$

so daß $z^{A_0^*}$ die Differentialgleichung

$$z\frac{dY}{dz} = YA_0^*$$

erfüllt.

Die Matrix A_0^* ist bis auf die Reihenfolge der A_j eindeutig bestimmt. A_0^* kann geschrieben werden:

$$A_0^* = (\delta_{ik} r_k + \delta_{i-1,k} \delta_k^*). \tag{5}$$

Dabei ist $\delta_{ik} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ für $\begin{matrix} i \neq k \\ i = k \end{matrix}$ und δ_k^* nach Bedarf 0 oder 1. Schließlich gibt es eine konstante Matrix S mit $|S| \neq 0$ so, daß

$$S A_0 S^{-1} = A_0^* \tag{6}$$

ist. Die Transformation (3) ergibt nun die Differentialgleichung

$$z \frac{dX}{dz} = - A_0^* X + X A_0 + X \sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu z^\mu.$$

Setzt man zunächst formal

$$X = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu z^\nu, \tag{7}$$

so folgt für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$\nu C_\nu - C_\nu A_0 + A_0^* C_\nu = \sum_{\mu=1}^{\nu} C_{\nu-\mu} A_\mu$$

und für $\nu = 0$:

$$C_0 A_0 = A_0^* C_0.$$

Es kann daher $C_0 = S$ gesetzt werden.

Für die einzelnen Elemente $c_{ik}^{(\nu)}$ von C_ν $(A_\nu = (a_{ik}^{(\nu)}))$ folgt also:

$$\nu c_{ik}^{(\nu)} - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(\nu)} a_{jk}^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} r_j c_{jk}^{(\nu)} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{i-1,j} \delta_j^* c_{jk}^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(\nu-\mu)} a_{jk}^{(\mu)}$$

oder

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(\nu)} (a_{jk}^{(0)} - \delta_{jk} \nu - \delta_{jk} r_i) = \delta_{i-1}^* c_{i-1,k}^{(\nu)} - \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(\nu-\mu)} a_{jk}^{(\mu)}.$$

Für $r \neq r_i$ sei nun $(A_0 - rE)^{-1} = (f_{ik}(r))$, demnach:

$$c_{il}^{(\nu)} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i-1}^* c_{i-1k}^{(\nu)} f_{kl}(r_i + \nu) - \sum_{\mu=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{(\nu-\mu)} a_{jk}^{(\mu)} f_{kl}(r_i + \nu). \tag{8}$$

Dabei ist $r_i + \nu \neq r_{i'}$ vorausgesetzt für alle i, i' und $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ Für den Fall, daß diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, versagt somit der Ansatz (3). Um auch diesen Fall zu erfassen, setzt man nach Rasch [7]) in Gleichung (1)

$$Y = Y_1 S.$$

Somit wird aus Gleichung (1)

$$z \frac{dY_1}{dz} = Y_1 \Big(A_0^* + \sum_{\nu=1}^{\infty} S A_\nu S^{-1} z^\nu \Big).$$

Es kann nun S so bestimmt gedacht sein, daß für die in A_1 auftretenden Wurzeln

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_{p_1} = r_{i'} + g \qquad (g > 0, \text{ ganz})$$

gilt. Dann wird also

$$A_0^* = \begin{pmatrix} \mathsf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathsf{A}_{n-p_1}^* \end{pmatrix},$$

wobei $\mathsf{A}_{n-p_1}^*$ die übrigen Teilmatrizen enthalte.

Setzt man nun $Y_1 = Y_2 V$, wobei $V = \begin{pmatrix} zE_{p_1} & 0 \\ 0 & E_{n-p_1} \end{pmatrix}$ ist (E_m ist die m-reihige Einheitsmatrix), so gilt für Y_2 eine Differentialgleichung der Form

$$z \frac{dY_2}{dz} = Y_2 \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu z^\nu,$$

und die Wurzeln der neuen charakteristischen Gleichung sind:

$$r_1 - 1, \ldots, r_{p_1} - 1; \quad r_{p_1+1}, \ldots, r_n .$$

Durch gegebenenfalls wiederholte Anwendung des Verfahrens läßt sich somit die Gleichung (1) so umgestalten, daß die geforderte Voraussetzung erfüllt ist.

Nach dieser Einschaltung kann der Beweis der Konvergenz für die Reihe (7) auf Grund der Formel (8) erbracht werden. Es ist nämlich

$$(9) \qquad |f_{jk}(r_i + \nu)| = \left| \frac{\delta_{jk}\, \nu^{n-1} + p_{jk}^{(2)}\, \nu^{n-2} + \cdots + p_{jk}^{(n)}}{\nu^n + q_1\, \nu^{n-1} + \cdots + q_n} \right| \leqq \frac{2}{\nu},$$

sofern $\nu > \mathsf{N}$ ist. N kann so bestimmt werden, daß (9) für alle $i, j, k = 1, \ldots, n$ gilt. Auf Grund von (1) gibt es sicher ein m und ein ϱ mit $0 < \varrho < R$ so, daß $|a_{ij}^{(\nu)}| \leqq \frac{m}{\varrho^\nu}$ ist. m kann hierbei so gewählt werden, daß

$$(10) \qquad \beta = 2n^3 m \geqq 1$$

ist. Es sei nun eine Zahl α so bestimmt, daß für alle $i, l = 1, \ldots, n$ und alle

$$\mu \leqq \mathsf{N}_1 \quad (\mathsf{N}_1 = \max(\mathsf{N}; 2n))$$

gilt:

$$(11) \qquad |c_{il}^{(\mu)}| \leqq \frac{\beta^\mu \alpha\, i}{n \varrho^\mu}, \text{ also um so mehr } |c_{il}^{(\mu)}| \leqq \frac{\beta^\mu \alpha}{\varrho^\mu}.$$

Durch vollständige Induktion soll gezeigt werden, daß die Ungleichung (11) für alle ν und alle $i, l = 1, \ldots, n$ gilt. Es sei also angenommen, daß für irgendein $\nu > \mathsf{N}_1$ und $j \leqq n$ die Richtigkeit von (11) gezeigt sei für

1. $\quad \mu = 1, 2, \ldots, \nu - 1; \quad i = 1, 2, \ldots, j; \quad l = 1, \ldots, n$

und, falls $j > 1$ ist, für

2. $\quad \mu = \nu; \quad i = 1, \ldots, j - 1; \quad l = 1, \ldots, n.$

Dann wird (vgl. (8), (9), (10), (11))

$$\begin{aligned} |c_{jl}^{(\nu)}| &\leqq \frac{n(j-1)\alpha\beta^\nu 2}{n \cdot \varrho^\nu \cdot \nu} + \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{n^2 \beta^{\nu-\mu} \alpha m 2}{\varrho^{\nu-\mu} \cdot \varrho^\mu \cdot \nu} \\ &\leqq \frac{(j-1)\alpha\beta^\nu}{n\varrho^\nu} + \frac{\nu \beta^{\nu-1} \alpha n^3 m \cdot 2}{\varrho^\nu n \nu} \\ &\leqq \frac{(j-1)\alpha\beta^\nu}{n\varrho^\nu} + \frac{\alpha\beta^\nu}{n\varrho^\nu} = \frac{j\alpha\beta^\nu}{n\varrho^\nu}. \end{aligned}$$

Für $j = 1$ liefert diese Abschätzung den Schritt von $\nu - 1$ auf ν. Für die übrigen j den Übergang von Zeile zu Zeile in C_ν. Ungleichung (11) ist somit für alle i, l, μ bewiesen. Die Reihe konvergiert daher für $|z| < \frac{\varrho}{\beta}$.

Der Konvergenzbeweis bleibt offenbar auch gültig, wenn nur die ersten j^* Zeilen der unbekannten Matrix X berechnet werden sollen. Dann braucht die Voraussetzung zu (8) nur für diese ersten j^* Zeilen erfüllt zu sein bzw. hergestellt zu werden. Da in $z^{A_0^*}$ oberhalb der Diagonale nur Nullen stehen, folgen aus den ersten j^* Zeilen von X auch die ersten j^* Zeilen von Y.

Eingegangen 11. Oktober 1937.

Über die Automorphismen eines algebraischen Funktionenkörpers von Primzahlcharakteristik.

Von *Hermann Ludwig Schmid* in München.

Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten vom Geschlecht g über einem algebraisch abgeschlossenen Konstantenkörper k der Charakteristik p. $\mathfrak{A}$ sei die Gruppe aller Automorphismen von K, die k elementweise festlassen; $\mathfrak{A} = \langle \sigma, \tau, \ldots \rangle$. Über die Gruppe $\mathfrak{A}$ ist bisher folgendes bekannt:

Ist $K = k(x)$ ein *rationaler* Funktionenkörper ($g = 0$), so besitzt K eine dreifach unendliche Schar von Automorphismen

$$x \to x\sigma = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (a, b, c, d \text{ aus } k, \quad ad - bc \neq 0),$$

und diese σ bilden die volle Gruppe $\mathfrak{A}$.

Ein *elliptischer* Funktionenkörper K ($g = 1$) besitzt eine einfach unendliche Schar von Automorphismen, nämlich die Translationsautomorphismen $\mathfrak{p}\tau = \mathfrak{p} + \mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{T}$ die Gruppe der τ, so ist die Faktorgruppe $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ endlich [1]).

Ist $g > 1$, so schließt man im Falle der Charakteristik 0 die Endlichkeit von $\mathfrak{A}$ im wesentlichen aus der Tatsache: Die Anzahl der Weierstraßpunkte von K ist $2g + 2$ bzw. größer als $2g + 2$, je nachdem K hyperelliptisch ist oder nicht [2]). Da aber bei Primzahlcharakteristik nur die Existenz eines einzigen Weierstraßpunktes gesichert ist, muß hier der Beweis der Endlichkeit von $\mathfrak{A}$ neu geführt werden.

Zu diesem Zwecke stelle ich eine für einen vorgegebenen Punkt $\mathfrak{P}$ von K normierte Erzeugung von K auf und ziehe daraus schrittweise die Folgerungen: Jeder Automorphismus von K, der $\mathfrak{P}$ festläßt, hat endliche Ordnung. Für diese Ordnungen existiert eine obere Grenze. Die Gruppe der $\mathfrak{P}$ festlassenden Automorphismen ist endlich.

Der Beweis für die Endlichkeit von $\mathfrak{A}$ wird gegenüber dem klassischen Fall wesentlich komplizierter. Dies liegt an den Ausartungen, die bei Charakteristik p für die Weierstraßpunkte auftreten können. Ich zeige zum Schluß, daß diese Ausartungen, um derentwillen der Beweis besonders kompliziert wird, wirklich vorkommen können.

Es sei noch bemerkt, daß die durch die Automorphismen von K gelieferten Transformationen der ganzen Differentiale von K im Falle eines nicht-hyperelliptischen Funktionenkörpers eine treue Darstellung g-ten Grades von $\mathfrak{A}$ liefern. Es ist mir aber nicht gelungen, diese Erkenntnis zu einem vereinfachten Beweis für die Endlichkeit von $\mathfrak{A}$ auszunutzen.

---

[1]) Siehe dazu: H. Hasse, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper II, Crelle **175** (1936), insbesondere Seite 69—72.

[2]) Siehe dazu: A. Hurwitz, Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich, Math. Ann. **41** (1893), S. 403—442.

1. Der Begriff eines Weierstraßpunktes muß bei Primzahlcharakteristik so gefaßt werden[3]):

Ein Primdivisor $\mathfrak{P}$ von K heißt Weierstraßpunkt, wenn nur endlich viele Primdivisoren von K dieselben Lückenexponenten wie $\mathfrak{P}$ besitzen. Es gilt der

Satz 1. *Alle Nichtweierstraßpunkte von K haben dieselben Lückenexponenten. Im Falle $g > 1$ existiert mindestens ein Weierstraßpunkt.*

Bei Charakteristik 0 sind die Lückenexponenten der Nichtweierstraßpunkte die Zahlen $1, 2, \ldots, g$. Ein Beweis des Satzes 1 ergibt sich aus der Betrachtung des Doppelkörpers KK', wo K' isomorph zu K ist, und des die Isomorphie zwischen K und K' vermittelnden Primdivisors $\mathfrak{E}$ von KK'. Die Lückenexponenten der Nichtweierstraßpunkte von K sind identisch mit den Lückenexponenten von $\mathfrak{E}$. Ein anderer Beweis des Satzes 1 ergibt sich aus der Betrachtung des von F. K. Schmidt eingeführten wahren Analogons einer Wronskischen Determinante, angewandt auf die Differentialklasse von K.

2. Es sei jetzt $g > 0$ und $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Primdivisor von K. Im Modul $\mathfrak{M}$ der für $\mathfrak{P}$ vorhandenen Ordnungszahlen (Nicht-Lückenexponenten) sei m die kleinste positive Zahl und x ein Element mit dem genauen Nenner $\mathfrak{P}^m$. $I_{\mathfrak{P}}$ sei der Integritätsbereich der höchstens für $\mathfrak{P}$ gebrochenen Elemente aus K. Wir beweisen

Satz 2. *Ist y ein nicht konstantes Element aus $I_{\mathfrak{P}}$ mit dem genauen Nenner $\mathfrak{P}^n$, so hat die irreduzible Gleichung zwischen x und y die Gestalt*

$$F(x, y) = y^l + P_1(x)\, y^{l-1} + \cdots + P_l(x) = 0 \tag{1}$$

$$(P_i(x) \text{ Polynome in } x).$$

Ist $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$ mit $(n', m') = 1$, so gilt $m' \mid l \mid m$. $P_l(x)$ hat den genauen Grad $\frac{nl}{m}$. Die Grade von $P_i(x)$ $(i = 1, \ldots, l-1)$ sind höchstens gleich $\left[\frac{ni}{m}\right]$. $k(x, y)$ ist über $k(x)$ separabel.

Beweis. Wir teilen die Zahlen von $\mathfrak{M}$ in Restklassen mod m ein. y_i sei ein Element mit dem genauen Nenner $\mathfrak{P}^{m_i}$, wo m_i möglichst klein in der Restklasse i mod m gewählt sei $(i = 1, \ldots, m-1)$. Dann ist

$$y_0 = 1, \quad y_1, \ldots, y_{m-1}$$

eine Basis von $I_{\mathfrak{P}}$ in bezug auf den Polynombereich $k[x]$. Ist

$$y y_i = \sum_{j=0}^{m-1} P_{ij}(x)\, y_j \qquad (P_{ij}(x) \text{ in } k[x],\ i = 0, \ldots, m-1),$$

so ist die charakteristische Gleichung der Matrix $(P_{ij}(x))$ eine Potenz der irreduziblen Gleichung zwischen x und y. $F(x, y)$ hat also jedenfalls die Gestalt (1) mit $l \mid m$. Es sei N der zu $F(x, y) = 0$ gehörige Normalkörper über $k(x)$. In N sind $P_1(x), \ldots, P_l(x)$ die elementarsymmetrischen Funktionen der Wurzeln von $F(x, y) = 0$. Jede dieser Wurzeln hat die (gebrochene) Ordnungszahl $-\frac{n}{m}$ in bezug auf den Nennerprimdivisor $\mathfrak{p}$ von x in $k(x)$. Also haben die Polynome $P_i(x)$ in x höchstens den Grad $\left[\frac{ni}{m}\right]$ $(i = 1, \ldots, l-1)$, während $P_l(x)$ den genauen Grad $\frac{nl}{m}$ haben muß. Daraus folgt $m' \mid l$.

Die Separabilität von $k(x, y)$ über $k(x)$ folgt aus der Tatsache, daß x wegen der Minimalwahl seines Nenners keine p-te Potenz ist.

---

[3]) Die Ausführungen dieses Abschnitts entnehme ich einem Vortrag von F. K. Schmidt auf der Tagung der DMV in Bad Kreuznach (Sept. 1937).

Wir ziehen aus Satz 2 insbesondere noch die Folgerung:
Ist $(n, m) = 1$, *so hat* $F(x, y)$ *den genauen Grad* m *und es ist* $K = k(x, y)$.
Allgemeiner können wir sagen:

Satz 3. *Ist* n *kein Vielfaches von* m, *so ist das Geschlecht von* $\mathsf{K} = k(x, y)$ *größer als Null.*

Beweis. Angenommen, K sei ein rationaler Körper $k(t)$. Wir können t so wählen, daß $\mathfrak{P}$ im Nennerdivisor von t aufgeht. Es sei

$$t \cong \frac{\mathfrak{p}_0}{\mathfrak{p}} \text{ in } k(t).$$

x und y haben als Elemente von $k(t)$ nur Potenzen von $\mathfrak{p}$ im Nenner. Daher sind x und y Polynome in t, und t hat (als Element von K) nur eine Potenz von $\mathfrak{P}$ im Nenner. Wegen der Minimaleigenschaft von x bezüglich $\mathfrak{P}$ muß

$$x = ct + d \qquad (c, d \text{ aus } k,\ c \neq 0),$$

also y ein Polynom in x sein. Die irreduzible Gleichung zwischen x und y ist aber zufolge unserer Voraussetzung $m \nmid n$ nach Satz 2 in y mindestens vom Grade 2. Also ist unsere Annahme falsch und das Geschlecht von K größer als 0.

Wir werden im folgenden n so wählen, daß n möglichst klein und kein Vielfaches von m ist. $\mathsf{K} = k(x, y)$ wird dann i. a. ein Unterkörper von K sein. Daß wir uns bei Endlichkeitsfragen über die Gruppe $\mathfrak{A}$ trotzdem auf Automorphismen von K beschränken können, lehrt folgender

Satz 4. *Ist* K^* *ein Teilkörper von* K *und* K/K^* *endlich algebraisch, so läßt sich jeder Automorphismus von* K^* *nur auf endlich viele Arten zu einem Automorphismus von* K *fortsetzen.*

Beweis. Zwei verschiedene Automorphismen σ und τ von K, welche denselben Automorphismus von K^* induzieren, liefern einen Automorphismus $\sigma^{-1}\tau$ von K/K^*. Daraus folgt nach der galoisschen Theorie sofort, daß ein Automorphismus von K^* höchstens auf $[\bar{K} : K^*]$ verschiedene Arten zu einem Automorphismus von K fortgesetzt werden kann, wo $\bar{K}$ den zu K/K^* gehörigen galoisschen Körper über K^* bedeutet.

3. Es sei wieder ein Primdivisor $\mathfrak{P}$ von K vorgegeben und $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}}$ die Untergruppe derjenigen Automorphismen von K, welche $\mathfrak{P}$ festlassen. x habe die Bedeutung des vorigen Abschnitts und y sei ein Element mit dem genauen Nenner $\mathfrak{P}^n$, wobei n kein Vielfaches von m und möglichst klein gewählt ist. Ein σ aus $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}}$ bewirkt eine Transformation von x und y der Gestalt

$$(2) \qquad \begin{aligned} x\sigma &= a + \alpha x \\ y\sigma &= b + b_1 x + \cdots + b_s x^s + \beta y \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a, b, b_1, \ldots, b_s, \alpha, \beta \text{ aus } k \\ \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0, \quad s = \left[\frac{n}{m}\right] \geqq 1 \end{pmatrix}.$$

Wir beweisen den

Hilfssatz. *Die Konstanten* α *und* β *in* (2) *sind Einheitswurzeln.*

Beweis. Die irreduzible Gleichung $F(x, y) = 0$ zwischen x und y hat die Gestalt (1). Es gilt

$$(3) \qquad F(x\sigma, y\sigma) \equiv cF(x, y) \qquad (c \neq 0 \text{ aus } k).$$

Daraus folgt

$$(3a) \qquad \alpha^r = c, \quad \beta^l = c \qquad \left(r = \frac{nl}{m}\right).$$

Wir können die Fälle

$$\alpha = 1 \quad \text{oder} \quad \beta = 1$$

ausschließen, ebenso wegen (3a) auch den Fall

$$\alpha^i = \beta \qquad (i = 1, \ldots, s),$$

weil daraus die nichttriviale Gleichung $\beta^{r-il} = 1$ folgt. Wir können nun x und y so normieren, daß

$$x\sigma = \alpha x \quad \text{und} \quad y\sigma = \beta y$$

wird. Dazu ersetzen wir zunächst x durch $x + \frac{a}{\alpha - 1}$ und erhalten die Normalform $x\sigma = \alpha x$. Sei dann

$$y\sigma = b + b_1 x + \cdots + b_s x^s + \beta y$$

bereits mit dem neuen x und den neuen b, b_i (β blieb erhalten) geschrieben. Jetzt ersetzen wir y durch $y + \frac{b}{\beta - 1} + c_1 x + \cdots + c_s x^s$ mit

$$c_i = \frac{b_i}{\beta - \alpha^i} \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

und erhalten die Normalform $y\sigma = \beta y$.

Wir wollen annehmen, $F(x, y) = 0$ sei gleich die irreduzible Gleichung zwischen den normierten Größen x und y. (3) lautet dann

$$F(\alpha x, \beta y) \equiv cF(x, y).$$

Es sei

$$G(x, y) \equiv \frac{F(x, y)}{x^r} \equiv \frac{y^l}{x^r} + c' \frac{y^{l'}}{x^{r'}} + \cdots + c^{(h)} \qquad (c^{(h)} \neq 0),$$

wo $(l, r), (l', r'), \ldots$ endlich viele verschiedene Paare nicht-negativer ganzer Zahlen sind, von denen keines das Paar $(0, 0)$ ist. Dann ist

$$\frac{\beta^l}{\alpha^r} = \frac{\beta^{l'}}{\alpha^{r'}} = \cdots = 1.$$

Wir zeigen, daß $G(x, y)$ außer der von 0 verschiedenen Konstanten $c^{(h)}$ noch mindestens zwei von Null verschiedene Terme besitzen muß, und daß nicht für alle auftretenden Exponentenpaare $(l, r), (l', r'), \ldots$

$$(4) \qquad \frac{l}{r} = \frac{\gamma\lambda}{\gamma\varrho}, \quad \frac{l'}{r'} = \frac{\gamma'\lambda}{\gamma'\varrho}, \ldots \quad \text{mit} \quad (\lambda, \varrho) = 1$$

erfüllt sein kann. Würde nämlich (4) gelten, so würde für $z = \frac{y^\lambda}{x^\varrho}$ die Gleichung

$$z^\gamma + c' z^{\gamma'} + \cdots + c^{(h)} = 0$$

folgen; es wäre also $z = c$ konstant, und zwischen x und y bestände die rational uniformisierbare Gleichung

$$y^\lambda = c x^\varrho,$$

im Widerspruch dazu, daß K nach Satz 3 nicht rational ist [4]).

Es gibt demnach in $G(x, y)$ neben (l, r) noch ein weiteres Exponentenpaar (l', r'), und auch derart, daß

$$lr' - l'r = 0.$$

Dann folgt aber aus $\frac{\beta^l}{\alpha^r} = \frac{\beta^{l'}}{\alpha^{r'}} = 1$ die nichttriviale Gleichung

$$\beta^{lr' - l'r} = 1.$$

Also sind α und β Einheitswurzeln.

---

[4]) Wegen $(\lambda, \varrho) = 1$ gibt es zwei ganze Zahlen $\bar\lambda, \bar\varrho$ so, daß $\lambda\bar\lambda + \varrho\bar\varrho = 1$ ist. Die Gleichung $y^\lambda = cx^\varrho$ wird dann durch $y = c^{\bar\lambda} t^{\bar\varrho}$, $x = \frac{1}{c\bar\varrho} t^\lambda$ und $t = x^{\bar\lambda} y^{\bar\varrho}$ rational uniformisiert.

Aus diesem Hilfssatz folgern wir

Satz 5. *Jeder Automorphismus σ aus $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ hat eine endliche Ordnung N. In N ist nur eine beschränkte p-Potenz als Faktor enthalten.*

Beweis. Wir wählen x und y wieder fest (nicht für ein spezielles σ normiert). n_α und n_β seien die Ordnungen der Einheitswurzeln α und β; sie sind zu p prim. Für beliebiges natürliches $\varkappa$ ist

$$x\sigma^{\varkappa} = (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{\varkappa-1})\,a + \alpha^{\varkappa} x.$$

Es ist also jedenfalls

$$x\sigma^{p n_\alpha} = x \text{ (sogar entweder } x\sigma^{p} = x \ \ (\alpha = 1) \text{ oder } x\sigma^{n_\alpha} = x \ \ (\alpha \neq 1)).$$

Sei dann $\sigma^{p n_\alpha} = \tau$ und

$$y\tau = d_0 + d_1 x + \cdots + d_s x^s + \delta y \qquad (\delta = \beta^{p n_\alpha}).$$

Für beliebiges natürliches $\varkappa$ ist

$$y\tau^{\varkappa} = (1 + \delta + \cdots + \delta^{\varkappa-1}) \sum_{i=0}^{s} d_i x^i + \delta^{\varkappa} y,$$

also jedenfalls

$$y\tau^{p n_\beta} = y \text{ (sogar entweder } y\tau^{p} = y \ \ (\delta = 1) \text{ oder } y\tau^{n_\beta} = y \ \ (\delta \neq 1)).$$

Unter Berücksichtigung von Satz 4 gibt es also ein N, so daß

$$\sigma^{N} = 1$$

ist. Für N kann z. B. die Zahl $p^2 n_\alpha n_\beta [\overline{K} : \mathsf{K}]$ gewählt werden, wenn $\overline{K}$ der zu K/K gehörige galoissche Körper über K ist. Daraus schließen wir insbesondere den zweiten Teil des Satzes 5.

Satz 6. *Die Ordnungen N aller Automorphismen σ aus $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}$ sind nach oben beschränkt. (Eine obere Schranke ist $p^2[K : \mathsf{K}]\, 84\,(g - 1)$.)*

Beweis. Beim Beweis des Satzes 4 erhielten wir für β die Gleichung $\beta^{lr' - l'r} = 1$. Nun ist $r' \leqq r$, $l' < l$ und

$$l \leqq m \leqq g + 1, \quad r \leqq n \leqq 2g + 1.$$

Aus diesen Ungleichungen und aus (3a) folgt, daß stets

$$n_\beta \leqq (g + 1)\,(2g + 1), \quad n_\alpha \leqq (g + 1)\,(2g + 1)^2$$

ist. Die Zahl $p^2 (g + 1)^2 (2g + 1)^3 [K : \mathsf{K}]$ ist also eine obere Schranke für die Ordnungen aller Automorphismen. Der folgende Beweis gibt die in unserem Satze angegebene, viel bessere obere Schranke [5]): Aus der Ordnung N von σ ziehen wir die höchste p-Potenz heraus: $N = p^\gamma N'$, $(N', p) = 1$. Dabei ist γ nach Satz 5 beschränkt. Wir betrachten die von $\tau = \sigma^{p^\gamma}$ erzeugte zyklische Gruppe $\mathfrak{G}_\tau$ der Ordnung N'. K_0 sei der zu $\mathfrak{G}_\tau$ gehörige Invariantenkörper innerhalb K, also K/K_0 separabel galoissch mit Galoisgruppe $\mathfrak{G}_\tau$, $[K : K_0] = N'$. Das Geschlecht von K_0 sei g_0. Dann ist

$$g - 1 = N'(g_0 - 1) + \frac{d}{2}, \tag{5}$$

wo d der Grad der Relativdifferente von K/K_0 ist. Wir müssen nun drei Fälle unterscheiden.

a) $g_0 > 1$. Dann folgt aus (5) sofort

$$N' \leqq g - 1.$$

[5]) Für diesen Beweis müssen wir $g > 1$ voraussetzen.

b) $g_0 = 1$. Dann muß $d > 0$ sein. Es sei $\mathfrak{p}_1$ ein Primdivisor von K_0, der sich nach K so verzweigt: $\mathfrak{p}_1 = (\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_{n_1})^{e_1}$, $n_1 e_1 = N'$, $e_1 > 1$. Wegen $d \geqq (e_1 - 1) n_1 \geqq \frac{N'}{2}$ folgt wieder aus (5)

$$N' \leqq 4(g-1).$$

c) $g_0 = 0$. Es seien

$$\mathfrak{p}_i = (\mathfrak{P}_1^{(i)} \cdots \mathfrak{P}_{n_i}^{(i)})^{e_i}, \quad n_i e_i = N', \quad e_i > 1 \qquad (i = 1, \ldots, t)$$

die von K_0 nach K auftretenden Verzweigungen. Dann ist

$$d = \sum_{i=1}^{t} n_i (e_i - 1) \geqq tN' - t\frac{N'}{2} = \frac{tN'}{2},$$

also nach (5), falls die Anzahl $t > 4$ ist,

$$N' \leqq 4(g-1).$$

Die Fälle $t = 1$ oder 2 können nicht vorkommen. Für $t = 3$ ist

$$g - 1 = -N' + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} n_i (e_i - 1) = \frac{N'}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3}\right)\right).$$

Der kleinste positive Wert des Klammerausdrucks $1 - \left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3}\right)$ wird durch $e_1 = 2, e_2 = 3, e_3 = 7$ geliefert. Also ist stets

$$N' \leqq 84(g-1).$$

Entsprechend ergibt sich für $t = 4$

$$N' \leqq 12(g-1).$$

Damit ist Satz 6 bewiesen [6]).

Aus Satz 6 folgt insbesondere

Satz 7. *Die Einheitswurzeln α und β in* (2) *sind nur endlich vieler Werte fähig.*

Beweis. Es sei M das kleinste gemeinsame Vielfache aller möglichen Ordnungen N. Dann ist für ein beliebiges σ aus $\mathfrak{A}_{\mathfrak{P}}$

$$x\sigma^M = \alpha^M x + \cdots = x,$$
$$y\sigma^M = \beta^M y + \cdots = y,$$

also $\alpha^M = 1$ und $\beta^M = 1$.

Zum Schluß dieses Abschnitts beweisen wir zwei Sätze, die für die weiteren Ausführungen der Arbeit entbehrlich sind, die wir aber der Vollständigkeit halber anführen.

Satz 8. *Die Untergruppe derjenigen Automorphismen, welche zwei vorgegebene Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ fest lassen, ist endlich.*

Beweis. Wir normieren x so, daß $\mathfrak{Q}$ Nullstelle von x wird, und y so, daß $\mathfrak{Q}$ in y in einer möglichst hohen Potenz aufgeht. Dann können sich x und y bei einem Automorphismus σ, der $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ fest läßt, nur noch so transformieren:

$$x\sigma = \alpha x, \qquad y\sigma = \beta y.$$

Nach Satz 7 folgt hieraus die Behauptung unseres Satzes.

Satz 9. *Jeder von 1 verschiedene Automorphismus eines algebraischen Funktionenkörpers mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper vom Geschlecht g besitzt höchstens $2g + 2$ Fixpunkte.*

---

[6]) Dieser Satz ist für den Fall des Körpers der komplexen Zahlen als Konstantenkörper schon von Hurwitz bewiesen. Siehe Hurwitz, loc. cit. [2]). Auf die hier gegebene Vereinfachung des Beweises bin ich von Herrn Deuring hingewiesen worden.

Beweis. Für $g = 0$ folgt die Richtigkeit des Satzes aus der Tatsache, daß eine gebrochene lineare Substitution höchstens 2 verschiedene Fixpunkte besitzt.

Es sei jetzt $g > 0$. Angenommen, der Automorphismus $\sigma \neq 1$ besitze die Fixpunkte

$$\mathfrak{P},\ \mathfrak{Q},\ \mathfrak{R}_1,\ \mathfrak{R}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{R}_\varrho \qquad (\varrho > 2g).$$

x und y seien für $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ wie in Satz 8 normiert. Außerdem sei n zu m teilerfremd gewählt, so daß $K = k(x, y)$ ist. Dann ist in der irreduziblen Gleichung (1) $l = m$ und $r = \frac{n}{m} l = n$. Nach dem Beweis unseres Hilfssatzes ist

$$\alpha^{mr'-nl'} = \beta^{mr'-nl'} = 1.$$

Wir bestimmen eine natürliche Zahl $\varkappa$ so, daß

$$(\varkappa m - n,\ mr' - nl') = 1$$

wird, was wegen der Teilerfremdheit von m und n stets möglich ist. x und y dürfen wir noch um konstante Faktoren abändern, ohne die bisherigen Normierungen zu stören. Nun gehen im Zähler von x höchstens $m - 1$ von $\mathfrak{Q}$ verschiedene Primdivisoren auf. Da $\mathfrak{Q}$ im Zähler von y wegen

$$\dim \mathfrak{P}^n = n - g + 1 + \dim\left(\frac{W}{\mathfrak{P}^n}\right) \leqq n - g + 1$$

mindestens in der Potenz $\mathfrak{P}^{n-g}$ aufgeht, besitzt der Zähler von y höchstens noch g von $\mathfrak{Q}$ verschiedene Primdivisoren. Wegen $m - 1 + g \leqq g + 1 - 1 + g = 2g$ und auf Grund unserer Voraussetzung $\varrho > 2g$ können wir also x und y multiplikativ so normieren, daß im Zähler von

$$x^\varkappa + y$$

ein Primdivisor $\mathfrak{R}_i$ $(1 \leqq i \leqq \varrho)$ auftritt, der weder im Zähler von x noch im Zähler von y vorkommt. Da $\mathfrak{R}_i \sigma = \mathfrak{R}_i$ ist, muß $\mathfrak{R}_i$ auch im Zähler von

$$(x^\varkappa + y)\sigma = \alpha^\varkappa x^\varkappa + \beta y$$

enthalten sein. Dies bedeutet aber

$$\alpha^\varkappa = \beta.$$

Zusammen mit der Gleichung $\alpha^n = \beta^m$ ergibt dies

$$\alpha^{\varkappa m - n} = 1.$$

Wegen $(\varkappa m - n,\ mr' - nl') = 1$ und $\alpha^{mr'-nl'} = 1$ folgt daraus $\alpha = \beta = 1$. Dies steht aber im Widerspruch zu unserer Voraussetzung, daß $\sigma \neq 1$ ist. Damit ist Satz 9 bewiesen.

Für $g = 0$ und $g = 1$ wird die in Satz 9 angegebene obere Grenze für die Anzahl der Fixpunkte wirklich erreicht. Aus Satz 9 folgt für nicht-hyperelliptische Funktionenkörper im klassischen Fall sofort die Endlichkeit der Automorphismengruppe, wenn man noch den in der Einleitung erwähnten Hurwitzschen Satz benutzt, daß dann die Anzahl der Weierstraßpunkte größer als $2g + 2$ ist.

4. Wir sind jetzt in der Lage, folgenden wichtigen Satz zu beweisen, der schon im wesentlichen identisch mit dem von uns zu beweisenden Hauptsatz ist:

Satz 10. *Die Untergruppe $\mathfrak{A}_\mathfrak{P}$ derjenigen Automorphismen eines nicht-rationalen algebraischen Funktionenkörpers K, die einen beliebig vorgegebenen Primdivisor $\mathfrak{P}$ von K festlassen, ist endlich.*

Beweis. Wir betrachten nur solche Elemente σ aus $\mathfrak{A}_\mathfrak{P}$, für welche in (2) $\alpha = \beta = 1$ ist. Diese Elemente bilden eine Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{A}_\mathfrak{P}$, und es genügt, die Endlichkeit

von $\mathfrak{U}$ zu zeigen, da nach Satz 7 die Faktorgruppe $\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}/\mathfrak{U}$ endlich ist. Für ein σ aus $\mathfrak{U}$ ist also

$$(6) \qquad \begin{aligned} x\sigma &= a + x \\ y\sigma &= \varphi(x) + y \end{aligned} \qquad (\varphi(x) = b + b_1 x + \cdots + b_s x^s),$$

und es gilt

$$(7) \qquad F(a + x, \varphi(x) + y) \equiv F(x, y).$$

Wenn wir zeigen können, daß a nur endlich viele Werte annehmen kann, ist unter Berücksichtigung von Satz 4 unsere Behauptung bewiesen. Wir müssen zwei Fälle unterscheiden:

a) *In*

$$F(x, y) \equiv y^l + P_1(x)\, y^{l-1} + \cdots + P_{l-1}(x)\, y + P_l(x)$$

gibt es unter den Polynomen $P_1(x), \ldots, P_{l-1}(x)$ *ein nicht konstantes.* Es sei $P_\lambda(x)$ das erste nicht konstante Polynom ($1 \leqq \lambda \leqq l-1$). Dann bilden wir die (für Charakteristik p modifizierte) λ-te Ableitung von $F(x, y)$ nach y. Es sei

$$\Phi(x, y) \equiv D_y^{(\lambda)} F(x, y) \equiv c_{l-\lambda}\, y^{l-\lambda} + \cdots + c_1 y + P_\lambda(x)$$
$$(c_i \text{ aus } k, \quad c_1 \neq 0).$$

Da $D_y^{(\lambda)} F(x, y)$ der Koeffizient von u^λ in $F(x, y + u)$ ist, gilt wieder

$$(8) \qquad \Phi(a + x, \ \varphi(x) + y) \equiv \Phi(x, y).$$

Wenn y in $\Phi(x, y)$ gar nicht vorkommt, so ist

$$P_\lambda(a + x) \equiv P_\lambda(x),$$

und es gibt nur endlich viele Werte a. In diesem Falle sind wir mit dem Beweis unseres Satzes schon fertig. Wir können also für den weiteren Beweis annehmen, daß y in $\Phi(x, y)$ wirklich vorkommt.

Wir setzen in den Identitäten (7) und (8) $x = y = 0$ und erhalten

$$F(a, b) = 0, \quad \Phi(a, b) = 0\ ^{7}).$$

Wir betrachten $F(x, y)$ und $\Phi(x, y)$ als Polynome in y und bilden die Resultante dieser Polynome nach y. Es ist

$$R_y(F, \Phi) = S(x)$$

ein Polynom in x, das nicht identisch verschwindet, weil F irreduzibel ist. $S(x)$ kann nicht konstant sein, weil die Gleichungen $F(a, y) = 0$ und $\Phi(a, y) = 0$ die gemeinsame Nullstelle b haben, also $S(a) = 0$ ist. $S(x)$ ist also ein nichtkonstantes Polynom in x, und für jedes a in (6) gilt

$$S(a) = 0.$$

Daraus folgt, daß a nur endlich vieler Werte fähig ist, und damit die Richtigkeit unseres Satzes.

b) *Die Polynome* $P_1(x), \ldots, P_{l-1}(x)$ *sind alle konstant.* Dann können wir $F(x, y)$ in der Gestalt

$$F(x, y) \equiv y^{p^\nu} + c_1\, y^{p^\nu - 1} + \cdots + c_\nu y + P(x)$$
$$\left(c_i \text{ aus } k, \ c_\nu \neq 0, \ P(x) \text{ vom genauen Grade } r = \frac{np^\nu}{m}\right)$$

annehmen. Denn hätte F nicht diese Form, so könnten wir z. B. y durch $y + x$ ersetzen und würden ein F des Falles a) bekommen. Da $F(x, y)$ auch in x separabel ist, muß es im Polynom $P(x)$ eine x-Potenz mit zu p primem Exponenten geben. Sei cx^h das höchste Glied in $P(x)$ mit zu p primem Exponenten. Wir wollen zuerst zeigen, daß

$$h > s = \left[\frac{n}{m}\right]$$

---

[7]) Wir können x so normieren, daß $F(0,0) = 0$ ist. Ist $\Phi(0,0) \neq 0$, so ersetzen wir Φ durch $\Phi - \Phi(0,0)$.

sein muß. Es ist nämlich

$$c_\nu \frac{dy}{dx} = P'(x)$$

ein Polynom in x vom Grade $h - 1$. Wäre nun $h \leqq s$, so könnten wir y durch $y - Q(x)$ ersetzen, wo $Q(x)$ ein Polynom in x vom Grade h mit

$$c_\nu Q'(x) = P'(x)$$

ist, und erhielten

$$dy = 0.$$

Dies stünde aber im Widerspruch zur Tatsache, daß y wegen der Minimalwahl von n keine p-te Potenz ist. Also ist $h > s$.

Aus $F(a + x, \varphi(x) + y) \equiv F(x, y)$ folgt hier für $y = 0$

$$\varphi(x)^{p^\nu} + c_1 \varphi(x)^{p^{\nu-1}} + \cdots + c_\nu \varphi(x) + P(a + x) - P(x) = 0.$$

Hieraus ergeben sich schrittweise durch Koeffizientenvergleich der Glieder in $x, x^2, \ldots, x^s$ die Elemente $b_1, b_2, \ldots, b_s$ als Polynome in a.

Ist $h > s + 1$, so ergibt schließlich ein Koeffizientenvergleich der Glieder in x^{h-1} eine Gleichung für a, in der sich das Glied mit a^1 nicht wegheben kann. Also ist in diesem Falle a nur endlich vieler Werte fähig.

Ist aber $h = s + 1$, so ergibt der Koeffizientenvergleich der Glieder in x^s, daß b_s wirklich von a abhängt. Hier ergibt dann der Vergleich der Glieder in x^{sp^ν} wiederum eine Gleichung für a, in der a wirklich vorkommt. Denn in b^{p^ν} kommt a mindestens in der Potenz a^{p^ν} vor, während in $P(a + x) - P(x)$ die Koeffizienten der Glieder in x^{sp^ν} das Element a höchstens in der Potenz

$$a^{r - sp^\nu}$$

enthalten. Es ist aber

$$r - sp^\nu = \frac{n}{m} l - \left[\frac{n}{m}\right] l < l = p^\nu.$$

Also ist in jedem Falle a nur endlich vieler Werte fähig und Satz 10 vollständig bewiesen.

Jetzt setzen wir $g > 1$ voraus. Wir betrachten die endlich vielen, für $g > 1$ nach Satz 1 sicher existierenden Weierstraßpunkte von K. Diese können sich bei allen Automorphismen σ von $\mathfrak{A}$ nur permutieren. Es genügt daher, die Endlichkeit derjenigen Untergruppe $\mathfrak{A}_W$ von $\mathfrak{A}$ zu zeigen, deren Elemente alle Weierstraßpunkte fest lassen, um die Endlichkeit von $\mathfrak{A}$ zu beweisen. Ist die Anzahl der Weierstraßpunkte größer als 1, so können wir die Endlichkeit von $\mathfrak{A}$ direkt aus Satz 8 erschließen. Ist aber nur ein Weierstraßpunkt vorhanden, so schließen wir die Endlichkeit von $\mathfrak{A}$ aus Satz 10. Es gilt also in jedem Falle der

Hauptsatz. *Die Automorphismengruppe eines algebraischen Funktionenkörpers vom Geschlecht $g > 1$ mit algebraisch abgeschlossenem Konstantenkörper ist endlich.*

5. Die bisherigen Betrachtungen lehren, daß der Beweis des Hauptsatzes für Körper, welche eine bei allen Automorphismen invariante endliche Menge von mindestens zwei Primdivisoren besitzen, verhältnismäßig leicht zu führen ist. Denn für solche Körper können wir x und y von vornherein so normieren, daß $x\sigma$ und $y\sigma$ bei allen Automorphismen σ, welche die invariante Primdivisormenge elementweise festlassen, nur die Form $x\sigma = \alpha x$, $y\sigma = \beta y$ haben können. Außerdem können wir dabei y so wählen, daß $K = k(x, y)$ wird. Die besonderen Schwierigkeiten beim Beweis des Hauptsatzes treten nur bei Körpern K mit folgenden Eigenschaften auf:

a) K besitzt nur einen Weierstraßpunkt $\mathfrak{P}$.

b) Das durch eine möglichst hohe Potenz von $\mathfrak{P}$ teilbare ganze Differential von K hat die Gestalt $\mathfrak{W} = \mathfrak{P}^{2g-2}$.

Enthielte nämlich $\mathfrak{W}$ außer $\mathfrak{P}$ noch andere Primdivisoren, so könnten sich diese bei allen σ aus $\mathfrak{A}_W$ nur permutieren, da $\mathfrak{W}\sigma = \mathfrak{W}$ ist, und wir hätten wieder eine invariante Menge von mindestens zwei Primdivisoren zur Verfügung.

c) $\mathfrak{P}$ ist zugleich der einzige Verzweigungspunkt von $K/k(x)$. Es ist $dx \cong \mathfrak{P}^{2g-2}$ und $\mathfrak{D}_x = \mathfrak{P}^{2g-2+2m}$ ($\mathfrak{D}_x$ Differente von $K/k(x)$).

Gäbe es nämlich außer $\mathfrak{P}$ noch weitere Verzweigungspunkte, so könnten sich diese wegen

$$dx\sigma \cong dx, \quad \text{also} \quad \mathfrak{D}\sigma = \mathfrak{D}$$

nur permutieren, und wir hätten wieder eine gewünschte invariante Primdivisormenge.

Die Eigenschaften a), b), c) können wir bereits im Falle eines hyperelliptischen Funktionenkörpers realisieren. Dazu stellen wir folgende Tatsachen voran [8]):

Ein hyperelliptischer Funktionenkörper K vom Geschlecht g kann durch eine Gleichung der Gestalt

$$F(x, y) = y^2 + f_g(x)\, y + f_{2g+1}(x) = 0$$

erzeugt werden. Dabei ist $f_g(x)$ ein Polynom in x höchstens vom Grade g, $f_{2g+1}(x)$ ein Polynom in x vom genauen Grade $2g + 1$. x hat den genauen Nenner $\mathfrak{P}^2$, y den genauen Nenner $\mathfrak{P}^{2g+1}$. Es ist

$$dx \cong \mathfrak{P}^{2g-2} F_y(x, y) \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_x \cong \mathfrak{P}^{2g+2} F_y(x, y).$$

Ein System von g Primdivisoren ist dann und nur dann nicht-speziell, d. h. $\dim(\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_g) = 1$, wenn $\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_g$ durch keinen Divisor aus $k(x)$ teilbar ist.

Aus diesem Regularitätskriterium schließen wir sofort, daß dann und nur dann $\dim(\mathfrak{P}^g) > 1$ ist, wenn $\mathfrak{P}$ ein Verzweigungspunkt ist. Wir haben also den

Satz 11. *Die Lückenexponenten der Nichtweierstraßpunkte eines (echten) hyperelliptischen Funktionenkörpers K sind die Zahlen $1, 2, \ldots, g$ (klassisches Verhalten). Alle und nur die Verzweigungspunkte von $K/k(x)$ sind Weierstraßpunkte von K. Für $p \neq 2$ besitzt K also $2g + 2$ Weierstraßpunkte, während für $p = 2$ die Anzahl der Weierstraßpunkte eine der Zahlen $1, 2, \ldots, g + 1$ ist.*

Jetzt sei $p = 2$. Der durch

$$y^2 + y + f_{2g+1}(x) = 0$$

erzeugte hyperelliptische Funktionenkörper hat die oben angegebenen Eigenschaften a), b), c). Er besitzt nur den einzigen Verzweigungspunkt $\mathfrak{P}$ und es ist $dx \cong \mathfrak{P}^{2g-2}$ das durch eine möglichst hohe Potenz von P teilbare ganze Differential.

Bei Charakteristik 0 gilt der Satz, daß die Gruppe $\mathfrak{A}_W$ eines hyperelliptischen Funktionenkörpers von der Ordnung 2 (bei nicht-hyperelliptischen Körpern sogar $\mathfrak{A}_W = 1$) ist. Diese Gruppe $\mathfrak{A}_W$ kann bei Primzahlcharakteristik beliebig hohe Ordnung erhalten. Als Beispiel wollen wir für $p = 2$ den durch

$$y^2 + y + x^{2g+1} = 0$$

erzeugten hyperelliptischen Körper vom Geschlecht g betrachten. Die $\mathfrak{P}$ festlassenden Automorphismen transformieren x und y so:

$$x\sigma = a + \alpha x,$$
$$y\sigma = b + b_1 x + \cdots + b_g x^g + \beta y.$$

[8]) Siehe dazu: H. Hasse u. H. L. Schmid, Über die Ausnahmeklassen bei abstrakten hyperelliptischen Funktionenkörpern, Crelle **176** (1936).

Es ist

$$F(x\sigma, y\sigma) = cF(x, y).$$

Daraus folgt zunächst

$$c = 1, \quad \beta = 1.$$

Der Koeffizientenvergleich der Glieder in x^ν $(0 \leqq \nu \leqq 2g+1)$ ergibt für

$\nu = 0$	$b^2 + b + a^{2g+1} = 0$
$\nu = 1$	$b_1 + a^{2g}\alpha = 0$
$2 \leqq \nu \leqq g$	$b_{\frac{\nu}{2}}^2 + b_\nu + \binom{2g+1}{\nu} a^{2g+1-\nu}\alpha^\nu = 0$, wenn ν gerade $b_\nu + \binom{2g+1}{\nu} a^{2g+1-\nu}\alpha^\nu = 0$, wenn ν ungerade
$g < \nu \leqq 2g-1$	$b_{\frac{\nu}{2}}^2 + \binom{2g+1}{\nu} a^{2g+1-\nu}\alpha^\nu = 0$, wenn ν gerade $\binom{2g+1}{\nu} a = 0$, wenn ν ungerade
$\nu = 2g$	$b_g^2 + a\alpha^{2g} = 0$
$\nu = 2g+1$	$\alpha^{2g+1} = 1.$

Aus dieser Tabelle folgt:

Wenn g keine Potenz von 2 ist, so ist $a = b_1 = b_2 = \cdots = b_g = 0$, $\alpha^{2g+1} = 1$, $b^2 + b = 0$. $\mathfrak{A}_W$ ist also von der Ordnung $4g+2$.

Wenn g aber eine Potenz von 2 ist, so ist $a^{4g^2} = a$, $\alpha^{2g+1} = 1$, $b^2 + b = a^{2g+1}$, $b_1 = a^{2g}\alpha$, $b_{2\mu} = b_{2\mu-1}^2$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$, alle übrigen $b_i = 0$. $\mathfrak{A}_W$ ist also von der Ordnung $2 \cdot 4g^2(2g+1)$. Wir haben also bewiesen:

Der durch die Gleichung $y^2 + y + x^{2g+1} = 0$ erzeugte hyperelliptische Funktionenkörper K vom Geschlecht g und der Charakteristik 2 besitzt nur einen Weierstraßpunkt. Die Automorphismengruppe von K, die mit der Gruppe $\mathfrak{A}_W$ der alle Weierstraßpunkte festlassenden Automorphismen zusammenfällt, ist von der Ordnung $16g^3 + 8g^2$ bzw. $4g+2$, je nachdem g eine Potenz von 2 ist oder nicht.

6. Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper einer Unbestimmten über einem *beliebigen* Konstantenkörper k. $\bar{k}$ sei die algebraisch abgeschlossene Hülle von k, und $\bar{K}$ der aus K durch Erweiterung von k zu $\bar{k}$ entstehende Körper. Wir können auf Grund unseres Hauptsatzes eine einfache Bemerkung über die Automorphismen von K machen:

Jeder Automorphismus von K/k ist auch ein Automorphismus von $\bar{K}/\bar{k}$. Bei algebraischem Abschluß kann sich also die Anzahl der Automorphismen nur vermehren. Also gilt:

Ein algebraischer Funktionenkörper über einem beliebigen Konstantenkörper hat nur endlich viele Automorphismen, wenn das Geschlecht des nach algebraischem Abschluß des Konstantenkörpers entstandenen Körpers größer als 1 ist.

Eingegangen 19. Oktober 1937.

Minimaldiskriminanten algebraischer Zahlkörper.

Von *Arnold Scholz* in Kiel.

Unter allen Zahlkörpern n-ten Grades sei k_n der Körper mit kleinster Diskriminante D_n; der absolute Betrag der n-ten Wurzel seiner Diskriminante heiße *der Differentenwert* E_n von K_n. Nach den Minkowskischen Diskriminantenabschätzungen gilt

$$\liminf_{n\to\infty} E_n \geqq e^2, \tag{1}$$

nach Blickfeldt sogar $\geqq e\pi$. Eine Abschätzung nach oben liefert die Gleichung $x^n - 2 = 0$ mit der Diskriminante $2^{n-1}n^n$; die zugehörige Körperdiskriminante ist dann ein Teiler von $2^{n-1}n^n$, also gilt

$$E_n < 2n.$$

Obgleich diese Abschätzung gegenüber der Minkowskischen sehr roh gewonnen ist, scheint sie doch in den meisten Fällen dem wahren Wert von E_n näher zu kommen als jene, insbesondere bei Primzahlgrad, und man weiß meines Wissens noch nicht einmal, ob allgemein $E_n = o(n)$ gilt, was jedoch zu vermuten ist. Dagegen werde ich zeigen, daß für eine gewisse Menge von Graden n der minimale Differentenwert dem Minkowskischen Wert bedeutend näher kommt, nämlich daß

$$E_n < (\log n)^2, \qquad |D_n| < (\log n)^{2n} \tag{2}$$

gilt, wenn n alle Grade $n = 2m(p-1)^m$ durchläuft mit $p > 7$ Primzahl, $m = \frac{1}{2}\varphi(p-1)$, φ Eulerscher Funktion. Genauer läßt sich für diese n sogar behaupten

$$E_n = O\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^2. \tag{3}$$

Und zwar besitzt gerade der volle Strahlklassenkörper mod p über dem Körper der $(p-1)$-ten Einheitswurzeln einen so niedrigen Differentenwert, während z. B. Kreiskörper K_n^0 durchweg einen Differentenwert

$$E_n^0 \geqq C\,\frac{n\log\log n}{\log n} \tag{4}$$

haben, wobei Äquivalenz in (4) insbesondere für die Grade $n = \prod\limits_{p<q}(p-1)$ eintritt (Fall der Πp-ten Kreisteilungskörper). Auch dies werde ich zeigen.

Wir beweisen zuerst (2). Wesentlich für den Erfolg ist hier, daß der Zwischenkörper K^0 der $(p-1)$-ten Einheitswurzeln ein total-imaginärer Körper ist, in dem der Führer p des Oberkörpers K in verschiedene Primideale voll zerfällt. Die Anzahl der teilerfremden Zahlrestklassen mod p ist in K^0 daher $(p-1)^{2m}$, wo m dieselbe Bedeutung wie in (2) hat. Die Anzahl der Hauptidealklassen mod p ist dann der s-te Teil, wenn sich die Einheiten auf s Restklassen verteilen. Dabei muß, weil die Zahlrestklassengruppe mod p eine Gruppe vom Exponenten $p-1$ ist, die $(p-1)$-te Potenz jeder Einheit $\equiv 1 \bmod p$

sein, und daher verteilen sich die Einheiten auf höchstens $(p-1)^r$ Restklassen mod p, wenn r die Erzeugendenanzahl der Einheitengruppe von K^0 ist. Nun besitzt aber K^0 eine Basiseinheit der Ordnung $p-1$, die Einheitswurzel, und als Totalimaginärkörper $2m$-ten Grades nur $m-1$ Basiseinheiten der Ordnung 0. Also ist $r=m$, $s \leqq (p-1)^m$, und die Hauptidealklassengruppe mod p hat mindestens die Ordnung $(p-1)^m$, erst recht die volle Idealklassengruppe (Strahlklassengruppe) mod p. Der Strahlklassenkörper K von K^0 mod p, in dem genau die Primideale $\mathfrak{j}=(\alpha)$ mit $\alpha \equiv 1 \pmod{p}$ aus K^0 voll zerfallen, hat daher einen Relativgrad $t \geqq (p-1)^m$ und einen Absolutgrad $n \geqq 2m(p-1)^m$.

Dagegen ist der Differentenwert $E < p^2$. Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß der Differentenwert wie die Differente für Körper $K > L > M$ die Beziehung

$$E(K/M) = E(K/L) \cdot E(L/M) \tag{5}$$

erfüllt, wenn man als Relativdifferentenwert von K/L die n-te Wurzel der absoluten L-Norm der Relativdiskriminante oder K-Norm der Relativdifferente von K/L definiert, wobei n der absolute Grad von K ist. Dies werden wir auch nachher zur genauen Aufstellung des Differentenwertes der Kreisteilungskörper verwenden. Ferner bemerken wir, daß der Differentenwert eines relativ-Abelschen Körpers kleiner ist als der Wert seines Führers, wenn dieser quadratfrei ist, d. h. bei rationalem Führer als der Führer selbst; denn die Differente ist ein Potenzprodukt der Primteiler des Führers, dessen gebrochene Exponenten unterhalb eins liegen. (Genau weisen diese Exponenten bei einem e-fach verzweigten Primteiler das Verhältnis $e-1:e$ auf.) In unserem Fall haben wir also

$$E(K^0) < p-1; \quad E(K/K^0) < p; \quad E(K) < p^2.$$

Um (2) zu erhalten, schätzen wir jetzt $2m = \varphi(p-1)$ nach unten ab. Bekanntlich gilt

$$m = \tfrac{1}{2}\varphi(p-1) > Cp(\log\log p)^{-1} \tag{6}$$

mit

$$\varphi(p-1) > C'\,(p-1)\,\{\log\log(p-1)\}^{-1}. \tag{6'}$$

Wir wollen dafür jedoch noch einen kurzen Beweis angeben, weil dann der Beweis von (8) später leichter zu übersehen ist. Durchlaufen $p_1, p_2, \ldots$ die Primzahlen, so hat die Funktion

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \prod_{q|x}\left(1-\frac{1}{q}\right), \quad q \text{ Primteiler},$$

im Intervall $P_r = p_1 p_2 \cdots p_r \leqq x < P_r p_{r+1}$ seinen kleinsten Wert an den Stellen kP_r; $k = 1, 2, \ldots, p_{r+1}-1$. Es braucht daher nur

$$\varphi(P_r) > CP_r\,(\log\log P_r)^{-1} \tag{6''}$$

bewiesen zu werden; denn dann gilt (6'') statt für die P_r auch für alle n, insbesondere für alle $n = p-1$, wie (6') fordert. (6'') folgt nun aus

$$\Pi(1-p_\varrho^{-1}) = e^{-\Sigma p_\varrho^{-1} - O(1)\Sigma p_\varrho^{-2}} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

unter Verwendung von $\Sigma p_\varrho^{-2} = O(1)$, $\Sigma p_\varrho^{-1} = \log\log p_r + O(1)$ und $\log p_r \sim \log\log P_r$, d. h. $\log p_r\,(\log\log P_r)^{-1} \to 1$ mit wachsendem p_r oder r.

Aus $n \geqq 2m(p-1)^m$ und (5) folgt nun

$$\log n \geqq m \log p > Cp \log p\,(\log\log p)^{-1} > p \tag{7}$$

für genügend hohes p. Für diese p gilt dann also (2). Daß (2) tatsächlich schon von $p = 11$ an gilt, ersieht man aus der an den Beweis von (3) anschließenden Aufstellung.

Ehe wir zum Beweis von (3) übergehen, beweisen wir die unter (4) gemachten Behauptungen und erhalten dabei schon eine für (3) wichtige Abschätzung. Wir hatten schon gesehen, daß das Verhältnis von Grad n und Führer f des Körpers der f-ten Einheitswurzeln am weitesten (d. h. von 1 am meisten abweichend) für die $f = P_r = p_1 \cdots p_r$ ist und dort, wenn C und C' dabei zwischen zwei positiven Schranken schwanken,

$$n : f = C : \log\log n \sim C : \log\log f \tag{8}$$

ausfällt. Entsprechend besitzt nun, wie wir zeigen werden, der Differentenwert E der f-ten Kreisteilungskörper gerade für die $f = P_r$ ein Verhältnis

$$E : f = C' : \log n \sim C' : \log E \sim C' : \log f, \tag{8}$$

während sonst das Verhältnis enger ist. Der Differentenwert ist nämlich für absolute Normalkörper der Differente gleich, also für die f-ten Kreisteilungskörper eine distributive Funktion von f und zwar

$$E(f) = f \prod_{q|f} q^{-\frac{1}{q-1}}. \tag{9}$$

Denn der Körper der q-ten Einheitswurzeln vom Grade $q-1$ hat die Diskriminante q^{q-2} und Differente $q^{\frac{q-2}{q-1}}$, und der Körper der q^k-ten Einheitswurzeln hat über dem der q^{k-1}-ten Einheitswurzeln die Relativdifferente q (Relativdiskriminante q^q = Diskriminante der Gleichung $x^q - \zeta = 0$, ζ eine q^{k-1}-te Einheitswurzel). Also gilt (9) gemäß (5). Nun gilt weiter

$$q^{-\frac{1}{q-1}} = 1 - \frac{\log q}{q} + \gamma_q \left(\frac{\log q}{q}\right)^2, \quad |\gamma_q| < 3. \tag{10}$$

Denn es ist

$$q^{-\frac{1}{q-1}} = e^{-\frac{\log q}{q-1}} = 1 - \frac{\log q}{q-1} + R \quad \text{mit} \quad 0 < R < \frac{(\log q)^2}{2(q-1)^2}.$$

Bei $f = q_1^{k_1} \cdots q_r^{k_r}$, $P_r = p_1 \cdots p_r$ wird dann

$$E(f) : f \geqq E(P_r) : P_r = \prod_{q \leqq p_r} \left(1 - \frac{\log q}{q} + \gamma_q \left(\frac{\log q}{q}\right)^2\right) \tag{11}$$

$$= e^{-\sum\limits_{q \leqq p_r} \frac{\log q}{q} + A_r} \text{ mit konvergentem } A_r,$$

da $q^{-2} (\log q)^2 < q^{-\frac{3}{2}}$ für große q ist und $\sum\limits_q q^{-\frac{3}{2}}$ konvergiert. Aus

$$\sum_{q \leqq p_r} \frac{\log q}{q} = \log p_r + O(1)$$

folgt dann

$$E(P_r) : P_r = C_r : p_r \quad \text{mit} \quad a < C_r < A,$$

also

$$E(P_r) : P_r \sim C_r : \log P_r,$$

letztes als Folge von $\log P_r = \sum\limits_{\varrho \leqq r} \log p_\varrho \sim p_r$. (Es genügt die Heranziehung von $\sum \log p_\varrho = a_r p_r$ mit $a < a_r < A$, weil wir lediglich die genaue Größenordnung von $E(P_r)$ feststellen wollen.)

Damit ist für die vollen Kreisteilungskörper gemäß (8) gezeigt, daß das Verhältnis $E : f$ nach unten durch $C : \log f$ begrenzt ist, und da anderseits $E < f$ ist, sind die Logarithmen von E, f und n einander äquivalent, und es gilt nach beiden Formeln (8) die Behaup-

tung (4) für die P_r-ten Kreisteilungskörper. Wir müssen also noch zeigen, daß diese durch die übrigen Kreiskörper in $E:n$ nicht unterboten werden können.

Zunächst gilt (4) auch für jeden Kreis*teilungs*körper; denn für den f-ten gilt mit den Bezeichnungen von (11) und $2 = q_1 < \cdots < q_r$

$$\frac{E(f)}{n(f)} > 0{,}96\,\frac{E(P_r)}{n(P_r)} > C\,\frac{\log\log n(P_r)}{\log n(P_r)} > C\,\frac{\log\log n(f)}{\log n(f)}.$$

Das folgt so: Ist q Primzahl und

$$G(q) = E(q):n(q) = q^{\frac{q-2}{q-1}}:(q-1),$$

so wird $G(3) = 0{,}866\ldots, G(5) = 0{,}836\ldots$, und dann wächst $G(q)$ monoton, weil die Ableitung kurz vor 5 verschwindet und dann positiv bleibt. Für $G(f) = \prod\limits_{q|f} G(q)$ gilt daher

$$\frac{G(f)}{G(P_r)} = \frac{G(q_2)\cdots G(q_r)}{G(p_2)\cdots G(p_r)} \geqq \frac{G(q_2)}{G(p_2)} \geqq \frac{G(5)}{G(3)} > 0{,}96,$$

was die erste Ungleichung oben bestätigt. Nun gilt (4) auch sonst:

Ist nämlich K^0 irgendein Kreiskörper, so hat sein Geschlechter-Klassenkörper, der maximale über K^0 unverzweigte Kreiskörper $Q_1 Q_2 \cdots Q_r$ (Q_ϱ Unterkörper eines $q_\varrho^{k_\varrho}$-ten Kreisteilungskörpers) dieselbe Differente bei vielfachem Grad. Also braucht man nur die „direkten" Kreiskörper ΠQ_ϱ zur Konkurrenz zuzulassen, und zwar darf man dabei statt Q_ϱ seinen Durchschnitt mit dem q_ϱ-ten Kreisteilungskörper nehmen; denn dadurch wird Grad wie Differente um dieselbe Potenz von q_ϱ erniedrigt; man hat also schon dasselbe Verhältnis $E:n$ bei niederem n. Es sei also Q_ϱ gleich ein Unterkörper der q_ϱ-ten Einheitswurzeln. Unter diesen ΠQ_ϱ, das ist jetzt noch zu zeigen, bilden die Kreisteilungskörper eine in $E:n$ nicht zu unterbietende Schar.

Diese Behauptung ist sicher richtig, wenn beim Übergang von ΠQ_ϱ zu dem in ihm enthaltenen Kreisteilungskörper $E:n$ nicht ansteigt. Wir behaupten noch mehr: es wird das Verhältnis $E:n$ sogar kleiner, wenn man aus dem Kreiskörper $K^0 = \Pi Q_\varrho$ ein Q streicht, das echter Teilkörper des q-ten Kreisteilungskörpers ist. Ist nämlich t der Grad von Q, $q-1 \geqq 2t \geqq 4$, so büßt der Grad n von K^0 durch Streichen von Q den Faktor t ein, $E(K^0)$ dagegen den Faktor $\sqrt[t]{q^{t-1}}$, und es ist

$$q^{t-1} > (2t)^{t-1} \geqq t^t$$

wegen $2^{t-1} \geqq t$ bei $t \geqq 2$. Damit ist alles unter (4) Gesagte bewiesen.

Jetzt beweisen wir noch (3), und daß (2) bereits für $p > 7$ gilt. Es sei also wieder K der volle Strahlklassenkörper mod p über dem Körper der $(p-1)$-ten Einheitswurzeln. Bei der obigen rohen Abschätzung von E wirkte sich mit Rücksicht auf n der Fall vieler kleiner Primteiler von $p-1$ ungünstig auf den Quotienten $E:n$ aus, während nach (4) gerade ein günstiges Ergebnis zu erwarten wäre. Wir erhalten nun, wenn q alle Primteiler von $p-1$ durchläuft, die bessere Abschätzung

$$(12)\qquad E < (p-1)^2\,\Pi\, q^{-\frac{1}{q-1}},$$

$$(13)\qquad n \geqq (p-1)\prod\left(1-\frac{1}{q}\right)\cdot(p-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\Pi\left(1-\frac{1}{q}\right)},$$

$$(13)\qquad \log n \geqq \frac{1}{2}(p-1)\log(p-1)\cdot\prod\left(1-\frac{1}{q}\right) + \log(p-1) - \sum\log\frac{q}{q-1},$$

$$(14)\qquad \log n > \frac{1}{2}(p-1)\log(p-1)\cdot\prod\left(1-\frac{1}{q}\right).$$

Hierbei ist $(p-1)\,\Pi\, q^{-\frac{1}{q-1}}$ die genaue Differente des $(p-1)$-ten Kreisteilungskörpers, während der weitere Faktor in (12) den Relativdifferentenwert des Klassenkörpers K übersteigt. Vergleicht man nun E mit $(\log n)^2$, so ist bei

$$q^{-\frac{1}{q-1}} < 1 - \frac{\log q}{q-1} + \frac{(\log q)^2}{2(q-1)^2}, \tag{15}$$

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)^2 = 1 - \frac{2}{q} + \frac{1}{q^2} \tag{16}$$

der Quotient $F(q)$ von (15) und (16) für alle q nach oben beschränkt und zwar < 1 von einem gewissen q an. Also gilt auch $\prod\limits_q F(q) < C$ und demnach

$$E : (\log n)^2 < C' : (\log (p-1))^2 < C'' : (\log\log n)^2,$$

womit (3) bewiesen ist.

(Eine Abschätzung $E < (\log n)^2 \cdot (\log\log n)^{-3} \cdot \log\log\log n$ könnte man noch für eine gewisse Menge von Graden erreichen, wenn es eine Schar von $(p-1)$-ten Kreisteilungskörpern mit den bestmöglichen Werten (4) gäbe.)

Ungleichung (2) folgt für $p > 7$ so: Da $\log (p-1) > 2$, ist sicher $E < (\log n)^2$, wenn $\prod\limits_{q|p-1} F(q) \leqq 1$ ist, wo wieder $F(q) = q^{-\frac{1}{q-1}}\left(1-\frac{1}{q}\right)^{-2}$ gesetzt sei. Für $q \geqq 11$ ist dabei jedes $F(q) < 1$, weil in (15) beide Seiten kleiner sind als

$$1 - \frac{2}{q-1} < \left(1-\frac{1}{q}\right)^2$$

wegen

$$\log q\left(1 - \frac{\log q}{2(q-1)}\right) > 2{,}3 \cdot \left(1-\frac{1}{8}\right) > 2.$$

Ferner ist $F(2) = 2$; $F(3) < 1{,}3$; $F(5) < 1{,}05$; $F(7) < 1$. (Kleinster Wert: $F(17) = 0{,}9457$; dann monoton $\to 1$.) Es gilt daher wenigstens

$$\prod_{q|p-1} F(q) \leqq F(2)\cdot F(3)\cdot F(5) < 2{,}73 \qquad \text{für alle } p$$

und

$$\prod_{q|p-1} F(q) \leqq F(2)\cdot F(5) < 2{,}1 \qquad \text{für } p = 6k-1.$$

Vergleicht man nun (12) mit dem Quadrat von (14), so hat man $E < (\log n)^2$ für $p > 30$ wegen $\log (p-1) > 3{,}4$; $(\frac{1}{2}\log (p-1))^2 > 2{,}89 > 2{,}73$; ebenfalls für $p = 23, 29$ bei $(\frac{1}{2}\log (p-1))^2 > 2{,}25 > 2{,}1$. Dagegen muß man für $p = 11, 13, 17, 19$ die schärfere Berechnung (13) heranziehen, um zum gewünschten Ergebnis zu gelangen. Man hat dort

$p =$	11	13	17	19
$n \geqq$	$4\cdot 10^2$	$4\cdot 12^2$	$8\cdot 16^4$	$6\cdot 18^3$
$(\log n)^2 \geqq$	35	40	173	109
$E <$	30	37	115	84

Hierbei sind $(\log n)^2$ und E auf das nächste Ganze nach unten und oben abgeschätzt.

Schlußbemerkung. Bereits die zweistufigen Körper liefern nach (3) wesentlich kleinere Diskriminanten als die Kreiskörper. Das Ergebnis könnte allenfalls noch so verbessert werden: Bei günstigem Verhalten der Einheiten könnte sich $\log n$ verdoppeln, ohne daß sich E in (3) ändert. Während durch Heranziehung absoluter Klassenkörper bei ganz roher Abschätzung vielleicht eine Senkung der Größenordnung von E in (3), jedoch nur um einen Faktor $o(\log n)$ erzielt werden kann, was kurz skizziert sei:

Der Körper der l-ten Einheitswurzeln (l Primzahl) hat eine Klassenzahl

$$h = O(\sqrt{l}\log l)^l,$$

wie sich aus der Klassenzahlformel ergibt, wenn man beachtet, daß nach R. Remak der Regulator, der hier gleichzeitig Regulator des reellen Unterkörpers ist, nach unten beschränkt ist, und daß jede L-Reihe einen Real- und Imaginärteil $< \sum_{\lambda=1}^{l/2} \lambda^{-1} \sim \log l$ aufweist. Dies gibt bei $n = (l-1)\,h$ und $E = E(l)$ wie in (9)

$$\log n \lesssim \frac{1}{2}\, l \log l; \qquad E \sim l \gtrsim \frac{2 \log n}{\log\log n}. \tag{17}$$

Ein Strahlklassenkörper mod f (f quadratfrei) lieferte hier $E \gtrsim lf\,(\log f)^{-1}$ und $\log n \lesssim l(\frac{1}{2}\log l + \log f)$, d. h. einen ungünstigeren Wert. Etwas besser führe man indessen wieder, wenn man statt des l-ten einen $\Pi\, p_\varrho$-ten Kreisteilungskörper nähme; man hätte aber immer noch

$$E > C \log n\,(\log\log n)^{-2} \log\log\log n. \tag{18}$$

Eingegangen 30. Oktober 1937.

Über den Zusammenhang zweier Klassen viergliedriger Laplacescher Zyklen.

Von *Hans Jonas* in Berlin-Steglitz.

1. *Einleitung.* Eine erste von der Differentialgleichung der Flächen konstanten Krümmungsmaßes abhängige Klasse viergliedriger Laplacescher Zyklen ergibt sich, wie ich bereits 1922 gezeigt habe [1]), aus der Verbiegung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids $z = xy$. Für den Fall der Verbiegungen erster Art mit reellem permanenten konjugierten System — α, β die Parameter der Asymptotenlinien, e^{φ} reell — nimmt diese Differentialgleichung die Form

$$\varphi_{\alpha\beta} = e^{\varphi} - e^{-\varphi}$$

an. Sie stellt dann die Integrabilitätsbedingung für das auf Grund einer bekannten Lösung φ zu integrierende, in einem anderen, wenn auch verwandten, geometrischen Zusammenhange schon vorher von Darboux betrachtete, vollständige System partieller Differentialgleichungen dar. Mit der auf diesem Wege erhaltenen Biegungsfläche des Paraboloids verbindet sich, nicht nur intrinsek, sondern in der räumlichen Orientierung bis auf Translationen bestimmt, ein imaginäres Hazzidakissches Paar von Biegungsflächen der Kugel. Gleichzeitig ist, und zwar ebenfalls durch das engere Band einer geometrischen Konstruktion mit der Biegungsfläche des Paraboloids verknüpft, ein viergliedriger Laplacescher Zyklus gegeben, dessen konjugierte Systeme (α, β) den Asymptotenlinien der Biegungsfläche entsprechen; die ihnen paarweise gemeinsamen Tangenten bilden die Seiten eines veränderlichen windschiefen Vierecks. Von den vier konjugierten Systemen bedecken zwei, im Zyklus einander gegenüberliegende, als Orthogonalnetze dieselbe Einheitskugel; diese besitzen, wie man unmittelbar übersieht, gemeinschaftliche Krümmungskreise in umgekehrter Zuordnung zu den Parametern. In anschaulicher Weise gehen die sphärischen Orthogonalnetze aus der Biegungsfläche dadurch hervor, daß man auf dieser das Paraboloid rollen läßt und zu der mitgeführten Achse (z-Achse) und zu ihrem Spiegelbild bezüglich der Tangentialebene jeweils die parallelen Radien durch den Mittelpunkt O der festen Kugel legt.

Auf diese vielseitigen geometrischen Beziehungen bin ich in der Folge mehrfach zurückgekommen, neuerdings, um den Nachweis zu liefern, daß die beiden, von den Diagonalstrahlen des Laplaceschen Zyklus durchlaufenen W-Kongruenzen simultane asymptotische Transformationen ihrer Brennmäntelpaare erfahren, wenn die Biegungsfläche des Paraboloids der Bianchi-Transformation B_k unterworfen wird [2]). Die beiden sphärischen

[1]) H. Jonas, Untersuchungen über die als Gewebe bezeichneten Kurvennetze und über eine Reihe von Problemen, die mit der Verbiegung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids zusammenhängen, Math. Annalen **87** (1922), S. 157.

[2]) H. Jonas, Ein allgemeiner Satz über W-Kongruenzen mit Anwendungen auf Laplacesche Zyklen, Biegungsflächen des einschaligen Hyperboloids und schiefe Weingartensche Systeme, Math. Annalen **114** (1937), S. 237. — Ich benutze die Gelegenheit, auf eine mir erst nachträglich bekannt gewordene Arbeit hinzuweisen, die den grundlegenden Satz über die Diagonalen eines beliebigen viergliedrigen Laplaceschen Zyklus bereits enthält: Backes, Sur les réseaux conjugués qui se reproduisent après quatre transformations de Laplace, Bull. Ac. Roy. de Belg. (5) **21** (1935), S. 883.

Orthogonalnetze des transformierten Zyklus liegen dann auf der ursprünglichen Kugel. Es ist klar, daß der in Rede stehende Laplacesche Zyklus durch projektive Raumtransformationen sich in einen allgemeineren verwandelt, bei dem zwei gegenüberliegende konjugierte Netze (α, β) der gleichen elliptisch gekrümmten F^2 angehören. Der weiterhin behandelte Fall einer geradlinigen F^2 bietet in mehrfacher Hinsicht besonderes Interesse. Nur angedeutet sei hier, daß dann in Anbetracht der Realitätsverhältnisse das Gebilde einem bemerkenswerten Grenzfall entspricht, der sich dem Bianchischen Vertauschbarkeitssatz für die Bäcklund-Transformation unterordnet. Die vorliegende Untersuchung dient zunächst einem anderen Zwecke.

Es ist nämlich Buchin Su gelungen, eine weitere Klasse viergliedriger Laplacescher Zyklen aufzustellen [3]), deren Bestimmung sich gleichfalls auf die Differentialgleichung der Flächen von konstanter Krümmung gründet. Su geht unter Benutzung der von Demoulin entwickelten projektiven Methode von dem Problem der Paare stratifikabler Kongruenzen aus und fordert insbesondere zu dem gesuchten Laplaceschen Zyklus die Existenz eines zweiten mit korrespondierenden Netzen und denselben Diagonalen. Diese letzteren werden dann Strahlen der gleichen linearen Kongruenz; sie bilden überdies die Achsenpaare eines zusammengesetzten W-Verbandes, wie er sich allgemein aus der Zusammensetzung der asymptotischen Flächentransformationen mittels des Bianchischen Vertauschbarkeitssatzes ergibt. Innerhalb des W-Verbandes läßt sich der gedachte Laplacesche Zyklus nicht nur auf zwei, sondern auf ∞^1 Weisen verwirklichen. Im folgenden gebe ich unter Verzicht auf Anwendung spezifisch projektiver Hilfsmittel eine einfache Darstellung der von Su gefundenen Laplaceschen Zyklen und setze dann den Zusammenhang mit meinen eigenen, von Su offenbar nicht gekannten Ergebnissen auseinander. Wichtig erscheint mir dabei die neue Gestalt, in der die Differentialgleichung der Flächen von konstanter Krümmung auftritt. Diese gibt Anlaß, noch auf die Hazzidakisschen Paare einzugehen, und liefert außerdem den beachtenswerten Sonderfall eines Laplaceschen Zyklus, dessen vier Flächen sich auf zwei von den Netzen doppelt überdeckte Flächen zweiten Grades reduzieren.

2. *Eine Eigenschaft der geschart-involutorischen Raumtransformation.* Bekanntlich läuft die spezielle asymptotische Transformation, bei der die erzeugende infinitesimale Verbiegung der gegebenen Fläche in eine Bewegung ausartet, auf die als Nullsystem bezeichnete Korrelation hinaus; die W-Kongruenz ist in dem zugehörigen linearen Komplex enthalten [4]). In der klassischen, auf den Moutardschen Prozeß gegründeten Theorie ist dann die transformierende Funktion (Bezeichnungen wie bei Bianchi):

$$R = c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta \qquad (c_i = \text{const}).$$

Die Zusammensetzung zweier *speziellen* asymptotischen Transformationen nach dem Vertauschbarkeitssatz unter gleichzeitiger Heranziehung des durch sie definierten linearen Büschels ergibt einen *zusammengesetzten W-Verband* (nach Terracini: ein Bianchisches System), in dem die Paare der Achsen, Träger der Punkte der beiden, mit Korrespondenz der Asymptotenlinien aufeinander bezogenen Scharen von Flächen, sich auf zwei feste, reelle oder imaginäre Geraden stützen, also ein und dieselbe lineare Kongruenz durchlaufen. Es sei daran erinnert, daß im zusammengesetzten W-Verband jede Fläche der einen Schar mit jeder Fläche der anderen die Brennmäntel einer W-Kongruenz bildet und daß irgend zwei Flächen der einen und zwei beliebige der anderen Schar einen viergliedrigen W-Zyklus oder ein *W-Quadrupel* bestimmen. Im Falle der speziellen asympto-

---

[3]) Buchin Su, On certain periodic sequences of Laplace of period four in ordinary space, The Tohoku Math. Journal **25** (1936), S. 227.

[4]) P. Tortorici, Sulle deformazioni infinitesime delle superficie e sul teorema di permutabilità, Rend. Circ. Mat. Palermo **35** (1913), S. 289.

tischen Transformationen lassen sich nun aus dem zusammengesetzten W-Verband auf ∞^2 Weisen *W-Quadrupel* herausheben, *bei denen gegenüberliegende Flächen von gegenüberliegenden Seiten des windschiefen Vierecks der gemeinschaftlichen Tangenten in korrespondierenden Kurven berührt werden.* Um dies im Anschluß an die klassische Theorie nachzuweisen und sich zugleich davon zu überzeugen, daß die Existenz derartiger W-Quadrupel für die Zusammensetzung der speziellen asymptotischen Transformationen charakteristisch ist, kann man sich der Formeln bedienen, die ich seinerzeit als Ergänzung zum Vertauschbarkeitssatz mit Rücksicht auf die Anwendungen aufgestellt habe [5]).

Für unseren Zweck empfiehlt es sich, die lineare Kongruenz zum Ausgangspunkt zu nehmen. Unter Hinweis auf die Zulässigkeit beliebiger Raumkollineationen wählen wir als (reell vorausgesetzte) Fokalgeraden die Parallelen zur x- und zur y-Achse, welche die z-Achse bezüglich in den Punkten $z = +1$ und $z = -1$ schneiden. Strahl u, v heiße derjenige, der auf den Fokalgeraden, von der z-Achse aus im Sinne der x bzw. y gerechnet, die Abschnitte $2u$ und $2v$ abteilt. Der Strahlmittelpunkt liegt dann in der x, y-Ebene und hat die Koordinaten $x = u$, $y = v$. Zur Festlegung eines Punktes auf dem Strahl benutzen wir das Teilungsverhältnis h. Wir betrachten nun auf den beiden Strahlen u, v und u', v' die Punkte x (d. h. x, y, z) und x', dargestellt durch:

$$(1) \qquad x = \frac{2hu}{h+1}, \qquad y = \frac{2v}{h+1}, \qquad z = \frac{h-1}{h+1},$$

$$(2) \qquad x' = \frac{2h'u'}{h'+1}, \qquad y' = \frac{2v'}{h'+1}, \qquad z' = \frac{h'-1}{h'+1},$$

und lassen sie, indem wir u, v, h und u', v', h' als Funktionen desselben Parameterpaares voraussetzen, zwei einander punktweise zugeordnete Flächen (x) und (x') beschreiben; als Parameter werden wir u, v bevorzugen. Eine einfache Rechnung zeigt, daß sich die Richtungskosinus der Flächennormalen von (x) wie

$$(3) \qquad -h_u : -hh_v : h(h+1) + uh_u - vhh_v$$

verhalten, und liefert als Bedingung dafür, daß die Tangentialebene von (x) den Strahl u', v' enthält, die Relationen:

$$(4) \qquad u' = u + \frac{h}{h_u}, \qquad v' = v - \frac{h}{h_v}.$$

Daraus folgt aber:

Eine Abbildung der linearen Kongruenz auf sich selbst, bei der der Strahl u, v Träger eines Punktes x sein soll, für den die Tangentialebene seiner Ortsfläche (x) durch den Strahl u', v' geht, ist dadurch gekennzeichnet, daß der Ausdruck

$$(5) \qquad \frac{du}{u'-u} - \frac{dv}{v'-v}$$

ein exaktes Differential wird.

Unter dieser Annahme sei gesetzt:

$$(6) \qquad \theta = \int \left(\frac{du}{u'-u} - \frac{dv}{v'-v} \right).$$

Dann wird

$$(7) \qquad h = \varkappa e^{\theta} \qquad (\varkappa = \text{const}).$$

[5]) H. Jonas, Über die Konstruktion der W-Kongruenzen zu einem gegebenen Brennflächenmantel und über die Transformation der R-Flächen, Jahresber. der Deutschen Math.-Vereinigg. **29** (1920), S. 40; dort insbes. § 3. — Als Bedingung dafür, daß die Flächen (x) und (x') von den Strahlen xx_2 und $x'x_1$ in korrespondierenden Kurven berührt werden, erhält man in den dortigen Bezeichnungen: $a_1' b_2 + b_1' a_2 = 0$. Mittels der Formeln l. c. (9) ergibt sich dann: $\Phi_{21} + J = 0$; entsprechend findet man: $\Phi_{12} - J = 0$. Aus (12) folgt: $h_1 = k_1 = h_2 = k_2 = 0$. Unter Berücksichtigung von § 2 (16) erkennt man, daß R_1 und R_2 dem von ξ, η, ζ erfüllten System § 2 (7) genügen, sich also linear mit konstanten Koeffizienten durch ξ, η, ζ ausdrücken lassen.

Für die durch (1), (6) bestimmte Punktreihe x, $\varkappa$ des Strahls u, v bilden also die Tangentialebenen der Flächen $(x, \varkappa)$ einen Büschel mit dem Strahl u', v' als Achse. Man erkennt aus (5), daß die Beziehung zwischen den Strahlen wechselseitig ist, und findet, indem man u, v mit u', v' vertauscht:

$$(8) \qquad h' = \varkappa' \frac{v' - v}{u' - u} e^{-\theta} \qquad (\varkappa' = \text{const}).$$

Werden demnach, wobei jetzt θ als willkürlich zu wählende Funktion von u, v aufzufassen ist, in die Formeln (1), (2) die Ausdrücke

$$(9) \qquad u' = u + \frac{1}{\theta_u}, \quad v' = v - \frac{1}{\theta_v}, \quad h = \varkappa e^{\theta}, \quad h' = -\varkappa' \frac{\theta_u}{\theta_v} e^{-\theta}$$

eingetragen, so gehen die Tangentialebenen der ∞^1 Flächen $(x, \varkappa)$ durch den Strahl u', v' und die der ∞^1 Flächen $(x', \varkappa')$ durch den Strahl u, v. Die durch die beiden ersten Formeln (9) gegebene Zuordnung innerhalb der linearen Kongruenz bewirkt also, daß diese als Kongruenz der Strahlen u, v mit derjenigen der Strahlen u', v', wie man mit Bianchi sagt, *im doppelten Sinne stratifikabel* ist [6]). Hervorgehoben sei die übrigens evidente Tatsache, daß die Verbindungslinie irgend zweier Punkte x, $\varkappa$ und x', $\varkappa'$ gemeinschaftliche Tangente der von ihnen beschriebenen Flächen ist. Daß die beiden Flächenscharen — wie stets im Falle wechselseitiger Stratifikabilität — einen *zusammengesetzten W-Verband* vorstellen, zeigt man, indem man mit Benutzung von (3) für die Flächen $(x, \varkappa)$ die Differentialgleichung der Asymptotenlinien bildet:

$$(10) \qquad [\theta_{uu} - (\theta_u)^2]\, du^2 + 2\theta_{uv}\, du\, dv + [\theta_{vv} + (\theta_v)^2]\, dv^2 = 0.$$

Da diese von $\varkappa$ nicht abhängt, besteht innerhalb der Flächenschar $(x, \varkappa)$ Korrespondenz der Asymptotenlinien und der konjugierten Systeme. Daß durch (10) auch die Asymptotenlinien der Flächen $(x', \varkappa')$ gegeben sind, folgert man ohne Rechnung aus dem Umstande, daß eine Fläche $(x', \varkappa')$ und eine Fläche $(x, \varkappa)$ mehr als ein Paar korrespondierender konjugierter Netze zulassen, nämlich alle diejenigen, die durch die Developpablen in den Kongruenzen der von x', $\varkappa'$ ausgehenden Verbindungslinien bestimmt sind.

Wir stellen nun weiter die Differentialgleichung der auf der Fläche $(x, \varkappa)$ von der Verbindungslinie mit dem Punkte x', $\varkappa'$ berührten Kurve auf. Dazu ist

$$\begin{aligned}
\frac{2hu}{h+1} + \lambda[h(h+1) + uh_u] + \mu u h_v &= \frac{2h'u'}{h'+1}, \\
\frac{2v}{h+1} + \lambda(-vh_u) + \mu(h+1-vh_v) &= \frac{2v'}{h'+1}, \\
\frac{h-1}{h+1} + \lambda h_u + \mu h_v &= \frac{h'-1}{h'+1}
\end{aligned}$$

zu setzen; mit λ, μ sind die Ableitungen x_u, x_v usw. unter Fortlassung des Faktors $\frac{2}{(h+1)^2}$ multipliziert. Es ist klar, daß diese Gleichungen, wenn (4) gilt, sogar für beliebiges h verträglich sind. Wir finden daraus:

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{h(v' - v)}{h'(u' - u)}$$

und erhalten die gesuchte Differentialgleichung der Kurvenschar:

$$(11) \qquad \frac{dv}{du} = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{h(v' - v)}{h'(u' - u)}, \qquad \text{d. h. } \frac{dv}{du} = \frac{\varkappa}{\varkappa'} e^{-2\theta}.$$

---

[6]) Zur Orientierung über das zuerst von Fubini und Bianchi allgemein in Angriff genommene Problem der Paare stratifikabler Kongruenzen vgl. man die Einleitung zu der Arbeit von Finikoff, Congruences stratifiables paraboliques, Math. Zeitschr. **36** (1933), S. 344.

Betrachtet werde jetzt das *W-Quadrupel*, bestehend aus zwei Flächen der einen und zwei der anderen Schar (Konstanten $\varkappa$, $\bar{\varkappa}$ und $\varkappa'$, $\bar{\varkappa}'$):

$$(12)\quad \begin{cases} x = \dfrac{2hu}{h+1}, \ldots, x' = \dfrac{2h'u'}{h'+1}, \ldots, \bar{x} = \dfrac{2\bar{h}u}{\bar{h}+1}, \ldots, \bar{x}' = \dfrac{2\bar{h}'u'}{\bar{h}'+1}, \ldots, \\ h = \varkappa e^{\theta}, \qquad h' = -\varkappa' \dfrac{\theta_u}{\theta_v} e^{-\theta}, \bar{h} = \bar{\varkappa} e^{\theta}, \qquad \bar{h}' = -\bar{\varkappa}' \dfrac{\theta_u}{\theta_v} e^{-\theta}. \end{cases}$$

Wird gefordert, daß auf den Flächen (x) und $(\bar{x})$ von den gegenüberliegenden Seiten des windschiefen Vierecks, also von xx' und $\bar{x}\bar{x}'$ einerseits, von $x\bar{x}'$ und $\bar{x}x'$ andrerseits korrespondierende Kurven berührt werden, was dann mit Rücksicht auf die Korrespondenz der konjugierten Netze die gleiche Beziehung zwischen den Flächen (x'), $(\bar{x}')$ zur Folge hat, so erhält man mittels (11):

$$\frac{\varkappa}{\varkappa'} = \frac{\bar{\varkappa}}{\bar{\varkappa}'}, \qquad \frac{\varkappa}{\bar{\varkappa}'} = \frac{\bar{\varkappa}}{\varkappa'}$$

und schließt — die Werte sind in (12) einzutragen —:

$$(13)\qquad \bar{\varkappa} = -\varkappa, \qquad \bar{\varkappa}' = -\varkappa'.$$

Die Ecken des windschiefen Vierecks $xx'\bar{x}\bar{x}'$ teilen also auf den Diagonalen, den Strahlen u, v und u', v' der linearen Kongruenz, die Fokaldistanzen harmonisch. Wir können sagen:

Wird eine Fläche einer (hyperbolischen) geschart-involutorischen Raumkollineation unterworfen, so lassen sich auf ihr und der transformierten Fläche auf ∞^1 Weisen korrespondierende Kurvennetze (α, β) derart bestimmen, daß immer die α-Tangente der einen Fläche die β-Tangente der anderen trifft und die Ortsflächen der beiden Tangentenschnittpunkte von den Tangentenpaaren gleichfalls berührt werden; zwischen den letzteren Flächen vermittelt die gleiche gescharte Involution.

Wie ersichtlich, sind die auf ihnen berührten Kurven die zu den α- und den β-Kurven konjugierten.

3. *Die von Su gefundenen viergliedrigen Laplaceschen Zyklen.* Aus dem zuletzt Bemerkten folgt nun, daß ein Zyklus Laplacescher Transformationen vorliegt, wenn die soeben mit (α, β) bezeichneten Kurvennetze, definiert durch

$$(14)\qquad \frac{dv}{du} = \pm \frac{\varkappa}{\varkappa'} e^{2\theta},$$

konjugiert sind. Die Bedingung dafür gewinnt man mit Hilfe von (10):

$$\theta_{uu} - (\theta_u)^2 = \frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2} e^{4\theta}[\theta_{vv} + (\theta_v)^2].$$

Ein konstanter Faktor läßt sich in e^{θ} hineinziehen, so daß wir $\varkappa' = \varkappa$ setzen können und die Differentialgleichung die Form

$$(15)\quad e^{-2\theta}[\theta_{uu} - (\theta_u)^2] = e^{2\theta}[\theta_{vv} + (\theta_v)^2], \quad \text{d. h. } e^{-\theta}(e^{-\theta})_{uu} + e^{\theta}(e^{\theta})_{vv} = 0$$

annimmt. Daß dies eine neue Gestalt der *Differentialgleichung für die Flächen konstanter Krümmung* ist, wird weiterhin in Art. **6** bestätigt werden.

Ist θ ein Integral von (15), so stellt sich nach (12) der noch von der Konstanten $\varkappa$ abhängige *viergliedrige Laplacesche Zyklus* folgendermaßen dar:

$$(16)\quad \begin{cases} x = \dfrac{2\varkappa e^{\theta}u}{\varkappa e^{\theta}+1}, & y = \dfrac{2v}{\varkappa e^{\theta}+1}, & z = \dfrac{\varkappa e^{\theta}-1}{\varkappa e^{\theta}+1}, \\ x' = \dfrac{2\varkappa(\theta_u u+1)}{\varkappa\theta_u - e^{\theta}\theta_v}, & y' = -\dfrac{2e^{\theta}(\theta_v v-1)}{\varkappa\theta_u - e^{\theta}\theta_v}, & z' = \dfrac{\varkappa\theta_u + e^{\theta}\theta_v}{\varkappa\theta_u - e^{\theta}\theta_v}, \\ \bar{x} = \dfrac{2\varkappa e^{\theta}u}{\varkappa e^{\theta}-1}, & \bar{y} = -\dfrac{2v}{\varkappa e^{\theta}-1}, & \bar{z} = \dfrac{\varkappa e^{\theta}+1}{\varkappa e^{\theta}-1}, \\ \bar{x}' = \dfrac{2\varkappa(\theta_u u+1)}{\varkappa\theta_u + e^{\theta}\theta_v}, & \bar{y}' = \dfrac{2e^{\theta}(\theta_v v-1)}{\varkappa\theta_u + e^{\theta}\theta_v}, & \bar{z}' = \dfrac{\varkappa\theta_u - e^{\theta}\theta_v}{\varkappa\theta_u + e^{\theta}\theta_v}. \end{cases}$$

Wir haben damit, auf die Parameter u, v bezogen, die *von Su gefundenen Zyklen*, von denen also ∞^1 in dem zugleich definierten zusammengesetzten W-Verband enthalten sind. In diesen entsprechen sich die durch (14), d. h. jetzt durch

$$\frac{dv}{du} = \pm e^{2\theta} \tag{17}$$

gegebenen konjugierten Netze (α, β), deren Bestimmung sich auf Quadraturen zurückführen läßt. Setzt man nämlich im Anschluß an (15)

$$e^{-2\theta}[\theta_{uu} - (\theta_u)^2] = e^{2\theta}[\theta_{vv} + (\theta_v)^2] = H\,, \tag{18}$$

so wird (die Integrabilitätsbedingungen sind erfüllt)

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sqrt{|\theta_{uv} + H|}\,(e^{\theta}du + e^{-\theta}dv)\,, \\ d\beta &= \sqrt{|\theta_{uv} - H|}\,(e^{\theta}du - e^{-\theta}dv)\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Die Asymptotenlinien auf den Flächen der sämtlichen Zyklen sind durch (10) gegeben. Sie sind, wenn

$$\operatorname{sgn}[(\theta_{uv})^2 - H^2] = \varepsilon \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

gesetzt wird, für $\varepsilon = +1$ reell, für $\varepsilon = -1$ imaginär. Aus (10) wird:

$$d\alpha^2 - \varepsilon d\beta^2 = 0, \quad \text{d. h.} \quad \alpha \pm \sqrt{\varepsilon}\beta = \text{const.} \tag{20}$$

Danach sind die konjugierten Netze (α, β) *isotherm-konjugiert*, die Strahlen der Zyklen, als W-Strahlen, bilden also *R-Kongruenzen*. Diese gehören überdies, wie *Su* bemerkt, dem besonderen Typus der *Wilczynskischen Kongruenzen* an [7]).

4. *Ein Satz über Flächen zweiten Grades.* Auch der Herleitung der zweiten Klasse Laplacescher Zyklen, die von der Differentialgleichung der Flächen von konstanter Krümmung, in der gegenwärtigen Darstellung also von (15) abhängt, schicken wir eine allgemeinere Betrachtung voraus. Als Repräsentant einer geradlinigen F^2 (u, v Parameter der Erzeugenden) diene das gleichseitige hyperbolische Paraboloid $z = xy$:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = uv. \tag{21}$$

Dieses denke man sich dann samt den damit verbundenen Gebilden einer beliebigen Raumkollineation unterworfen [8]).

Der durch u, v bestimmte Punkt x des Paraboloids durchlaufe ein *konjugiertes System* (α, β), wobei wir zur Vereinfachung der Rechnung vorläufig α, β als unabhängige Variablen auffassen. Es ist zunächst also

$$u_\alpha v_\beta + v_\alpha u_\beta = 0. \tag{22}$$

Wir ermitteln den zweiten Schnittpunkt x' des Paraboloids

$$x' = u', \quad y' = v', \quad z' = u'v' \tag{23}$$

mit der Schnittgeraden der Schmiegungsebenen der durch x gehenden Kurven des Netzes. Dazu muß in bezug auf die Variable α die Relation

$$\begin{vmatrix} u_{\alpha\alpha} & u_\alpha & u' - u \\ v_{\alpha\alpha} & v_\alpha & v' - v \\ (uv)_{\alpha\alpha} & (uv)_\alpha & u'v' - uv \end{vmatrix} = 0$$

---

[7]) Erwähnt sei, daß die Möglichkeit, aus Wilczynskischen Kongruenzen viergliedrige Laplacesche Zyklen zu bilden, schon früher von Demoulin angedeutet worden ist: Sur les surfaces R et sur les surfaces Ω, C. R. de l'Ac. des Sc. Paris **153** (1911), S. 705.

[8]) So hat man z. B., wenn für das einschalige Hyperboloid die Darstellung

$$\bar{x} = a\frac{1+uv}{u+v}, \quad \bar{y} = b\frac{u-v}{u+v}, \quad \bar{z} = c\frac{1-uv}{u+v}$$

benutzt wird, als Formeln der Raumkollineation:

$$\bar{x} = a\frac{1+z}{x+y}, \quad \bar{y} = b\frac{x-y}{x+y}, \quad \bar{z} = c\frac{1-z}{x+y}.$$

erfüllt sein, aus der sich

$$\frac{v_{\alpha\alpha}}{v_\alpha} - \frac{u_{\alpha\alpha}}{u_\alpha} = \frac{2u_\alpha}{u' - u} - \frac{2v_\alpha}{v' - v} \tag{24}$$

ergibt. Entsprechend gilt in den Ableitungen nach β:

$$\frac{v_{\beta\beta}}{v_\beta} - \frac{u_{\beta\beta}}{u_\beta} = \frac{2u_\beta}{u' - u} - \frac{2v_\beta}{v' - v}. \tag{25}$$

Setzen wir jetzt im Anschluß an (22)

$$\frac{v_\alpha}{u_\alpha} = \varrho, \qquad \frac{v_\beta}{u_\beta} = -\varrho, \tag{26}$$

was gleichbedeutend damit ist, daß, wenn u, v die Variablen sind, durch

$$\frac{dv}{du} = \pm \varrho \tag{27}$$

das konjugierte Netz (α, β) definiert sein soll, so folgt aus (22), (24), (25):

$$\frac{\varrho_\alpha}{2\varrho} = \frac{u_\alpha}{u' - u} - \frac{v_\alpha}{v' - v}, \qquad \frac{\varrho_\beta}{2\varrho} = \frac{u_\beta}{u' - u} - \frac{v_\beta}{v' - v},$$

d. h.

$$\frac{d\varrho}{2\varrho} = \frac{du}{u' - u} - \frac{dv}{v' - v}. \tag{28}$$

Mithin gilt:

Die Bedingung dafür, daß bei einer Abbildung des Paraboloids oder allgemein einer geradlinigen F^2 auf sich selber (u' und v' Funktionen von u, v) die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte x und x' Schnittlinien der Schmiegungsebenen eines vom Punkte x beschriebenen konjugierten Systems werden, besteht darin, daß die rechte Seite von (28) *ein exaktes Differential wird.*

Wie in (6) werde die Größe θ eingeführt:

$$\theta = \int \left(\frac{du}{u' - u} - \frac{dv}{v' - v} \right), \tag{29}$$

die auch hier wieder als willkürliche Funktion von u, v angesehen werden kann, und dann die Abbildung des Paraboloids auf sich selber durch die Formeln

$$u' = u + \frac{1}{\theta_u}, \qquad v' = v - \frac{1}{\theta_v} \tag{30}$$

definiert. Man entnimmt aus (27), (28), daß in der Geraden xx' sich die Schmiegungsebenen der vom Punkte x beschriebenen Kurven des linearen Büschels

$$\frac{dv}{du} = ke^{2\theta} \qquad (k = \text{const}) \tag{31}$$

schneiden, der ∞^1 zu $\pm k$ gehörige konjugierte Netze enthält. Man erkennt ferner, daß die Ebenen durch xx' zugleich Schmiegungsebenen eines vom Punkte x' beschriebenen linearen Büschels sind, der [vgl. (7), (8)] durch

$$\frac{dv'}{du'} = k' \left(\frac{v' - v}{u' - u} \right)^2 e^{-2\theta} = k' \left(\frac{\theta_u}{\theta_v} \right)^2 e^{-2\theta} \qquad (k' = \text{const}) \tag{32}$$

gegeben ist und ebenfalls ∞^1 durch $\pm k'$ bestimmte konjugierte Netze umfaßt.

Wir fragen nach den Fortschreitungen $\frac{dv}{du}$ und $\frac{\delta v'}{\delta u'}$ der Punkte x und x', für die sich die Tangenten paarweise treffen. Dazu muß

$$\begin{vmatrix} du & \delta u' & u' - u \\ dv & \delta v' & v' - v \\ d(uv) & \delta(u'v') & u'v' - uv \end{vmatrix} = 0$$

sein. Es ergibt sich hieraus die Bedingung

$$\frac{dv}{du}\frac{\delta v'}{\delta u'} = \left(\frac{v'-v}{u'-u}\right)^2, \tag{33}$$

der, wie ersichtlich, die Ausdrücke (31), (32) genügen, wofern

$$k' = \frac{1}{k} \tag{34}$$

gesetzt wird. Damit ist nun zwischen den von den Punkten x und x' beschriebenen Kurvenbüscheln eine solche Beziehung hergestellt, daß die durch

$$\frac{dv}{du} = ke^{2\vartheta} \quad \text{und} \quad \frac{dv'}{du'} = \frac{1}{k}\left(\frac{\theta_u}{\theta_v}\right)^2 e^{-2\vartheta} \tag{35}$$

bestimmten Kurven jeweils dieselbe durch xx' gehende Schmiegungsebene zulassen. Der von k abhängige Tangentenschnittpunkt ξ, dargestellt durch:

$$\xi = u + \frac{1}{\theta_u - ke^{2\vartheta}\theta_v}, \qquad \eta = v + \frac{ke^{2\vartheta}}{\theta_u - ke^{2\vartheta}\theta_v}, \qquad \zeta = uv + \frac{ke^{2\vartheta}u + v}{\theta_u - ke^{2\vartheta}\theta_v}, \tag{36}$$

durchläuft dann aber die Enveloppe der gemeinschaftlichen Schmiegungsebene, also eine Fläche, die von dem Tangentenpaar gleichfalls berührt wird. Wir haben damit den Satz:

Die durch (30) *definierte Abbildung des Paraboloids* (*allgemeiner: einer geradlinigen* F^2) *auf sich selbst hat die Eigenschaft, daß auf den Schnittlinien der in den Punkten x und x' konstruierten Tangentialebenen je ∞^1, in projektiven Reihen angeordnete Punkte ξ liegen, für die die Tangentialebenen ihrer Ortsflächen Büschel mit den Geraden xx' als Achsen bilden. Die Kongruenz der Tangentialebenenschnitte ist also einseitig stratifikabel mit der Kongruenz der Verbindungslinien xx'.*

Die zwischen diesen beiden Kongruenzen bestehende Polarreziprozität hat zur Folge, daß sich in ihnen die Developpablen entsprechen, deren Differentialgleichung, wie sich alsbald herausstellen wird, mit (10) zusammenfällt. Es gilt nun zu unserem Ergebnis der bemerkenswerte Zusatz:

Von den Tangentialebenen der beiden Brennmäntel in der Kongruenz der Tangentialebenenschnitte geht jede durch den ihr vermöge der Korrespondenz der Developpablen zugeordneten Brennpunkt von xx'.

Zum Beweise machen wir für die Brennpunkte des Strahls xx' und für die des Tangentialebenenschnitts (zwei Werte für σ und für τ) den Ansatz:

$$\frac{\sigma u + u'}{\sigma + 1}, \qquad \frac{\sigma v + v'}{\sigma + 1}, \qquad \frac{\sigma uv + u'v'}{\sigma + 1}, \tag{37}$$

$$\frac{\tau u + u'}{\tau + 1}, \qquad \frac{\tau v' + v}{\tau + 1}, \qquad \frac{\tau uv' + u'v}{\tau + 1}. \tag{38}$$

In (38) ist berücksichtigt, daß der Tangentialebenenschnitt die beiden durch u, v' und durch u', v bestimmten Punkte des Paraboloids verbindet. Wir setzen zunächst die Funktionen $u'(u, v)$ und $v'(u, v)$ noch als beliebig gewählt voraus, um gleichzeitig zu zeigen, daß *die in dem Zusatz ausgesprochene Eigenschaft für die durch* (30) *definierte Abbildung charakteristisch ist.* Die durch (37) dargestellte Fläche soll eine Fortschreitung in der Richtung des Strahls xx' zulassen. Das ergibt nach einer leicht zu übersehenden Vereinfachung:

$$\frac{\sigma du + du'}{u' - u} = \frac{\sigma dv + dv'}{v' - v} = \frac{\sigma d(uv) + d(u'v')}{u'v' - uv}.$$

Man erhält hieraus:

$$\sigma = \frac{u' - u}{v' - v}\frac{dv'}{du} = \frac{v' - v}{u' - u}\frac{du'}{dv}, \tag{39}$$

mithin als Differentialgleichung der Developpablen:

$$\frac{dv}{du}\frac{dv'}{du'} = \left(\frac{v'-v}{u'-u}\right)^2, \tag{40}$$

d. h.

$$v'_v\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \left[v'_u - \left(\frac{v'-v}{u'-u}\right)^2 u'_v\right]\frac{dv}{du} - \left(\frac{v'-v}{u'-u}\right)^2 u'_u = 0\,. \tag{41}$$

Ist $\frac{dv}{du} = \nu$ die eine oder die andere Wurzel, so gehört dazu:

$$\sigma = \frac{u'-u}{v'-v}(v'_u + v'_v\nu) = \frac{v'-v}{u'-u}\left(u'_u\frac{1}{\nu} + u'_v\right). \tag{42}$$

Man gewinnt die entsprechenden Formeln für die Kongruenz der Tangentialebenenschnitte durch Vertauschung von v und v'. Dabei bleibt die Gleichung (40) bzw. (41) der Developpablen dieselbe, während (39) in

$$\tau = -\frac{u'-u}{v'-v}\frac{dv}{du}, \quad \text{d. h.} \quad \tau = -\frac{u'-u}{v'-v}\nu \tag{43}$$

übergeht. Die Normalenkosinus der Ebene, die den Tangentialebenenschnitt und den durch (37) dargestellten Punkt von xx' enthält, verhalten sich wie

$$(\sigma v - v') : (\sigma u - u') : (1-\sigma)\,.$$

Soll diese die Tangentialebene des durch (38), (43) bestimmten Brennmantels sein, so muß sie außer dem Strahl, durch den sie bereits hindurchgeht, noch eine weitere Tangente, etwa die durch $du = 0$ definierte, enthalten. Das gibt:

$$\sigma + \tau v'_v + \frac{v'-v}{u'-u}u'_v = 0.$$

Diese Bedingung wird nun in der Tat von den einander zugeordneten Werten (42) und (43) für σ und τ erfüllt, wofern

$$\frac{u'_v}{(u'-u)^2} + \frac{v'_u}{(v'-v)^2} = 0 \tag{44}$$

vorausgesetzt ist; (44) bedeutet aber wieder, daß der in (29) unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck ein exaktes Differential ist [9]), daß also die Formeln (30) gelten. Der Beweis ist damit geführt. Die den beiden Kongruenzen gemeinsame Gleichung der Developpabeln verwandelt sich jetzt in (10)

$$[\theta_{uu} - (\theta_u)^2]\,du^2 + 2\theta_{uv}\,du\,dv + [\theta_{vv} + (\theta_v)^2]\,dv^2 = 0. \tag{45}$$

5. *Viergliedrige Laplacesche Zyklen mit zwei gegenüberliegenden Netzen auf derselben geradlinigen F^2.* Es seien ξ und $\bar{\xi}$ die durch (36) für k und $-k$ dargestellten Tangentenschnittpunkte. Wir wissen, daß $x\xi$ und $x\bar{\xi}$ konjugierte Tangenten des Paraboloids im Punkte x und ebenso $x'\xi$ und $x'\bar{\xi}$ konjugierte Tangenten in x' sind. Ein viergliedriger Laplacescher Zyklus entsteht, wenn die Gegenseiten des windschiefen Vierecks $x\xi\,x'\bar{\xi}$ in den Punkten x und x' des Paraboloids korrespondierende Kurven berühren. Dazu müssen, wie man unter Berücksichtigung von (35) erkennt, für einen gewissen Wert

[9]) Zugleich wird ersichtlich, daß die Beziehung zwischen den beiden Kongruenzen im allgemeinen nicht wechselseitig ist. Dazu müßte nämlich (Vertauschung von v und v') auch der Ausdruck

$$\frac{du}{u'-u} + \frac{dv}{v'-v}$$

ein exaktes Differential sein. Das führt auf $u' = u'(u)$, $v' = v'(v)$. Unter diese Annahme fällt der in Art. 7 betrachtete Laplacesche Zyklus.

von k und für den entgegengesetzten die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dv}{du} = ke^{2\theta}, \quad \frac{dv'}{du'} = -\frac{1}{k}\left(\frac{\theta_u}{\theta_v}\right)^2 e^{-2\theta} \tag{46}$$

identisch werden. Bildet man $\frac{dv'}{du'}$ mit Hilfe von (30) und identifiziert den aus der zweiten Formel (46) hervorgehenden Wert von $\frac{dv}{du}$ mit der rechten Seite der ersten Formel, so ergibt sich eine zunächst noch k^2 enthaltende partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für θ, in der ohne Beschränkung der Allgemeinheit $k = 1$ gesetzt werden darf. Sie lautet dann wie (15):

$$e^{-\theta}(e^{-\theta})_{uu} + e^{\theta}(e^{\theta})_{vv} = 0\,. \tag{47}$$

Auch die konjugierten Netze (α, β) des Zyklus sind wieder durch $\frac{dv}{du} = \pm e^{2\theta}$, d. i. durch die Quadraturen (19) gegeben, während den Asymptotenlinien auf den Flächen der Zyklen von Su [s. (10) und (20)] jetzt in dem neuen Zyklus die Developpablen der zueinander polarreziproken Diagonalenkongruenzen entsprechen. Die Darstellung dieses *viergliedrigen Laplaceschen Zyklus, in dem zwei gegenüberliegende konjugierte Netze* (α, β) *das Paraboloid* $z = xy$ (*bei Anwendung einer Raumkollineation die gleiche geradlinige* F^2) *bedecken*, ergibt sich im Anschluß an (36), wobei also $k = \pm 1$ einzusetzen ist:

$$\begin{cases} x = u, & y = v, & z = uv, \\ \xi = u + \dfrac{1}{\theta_u - e^{-\theta}\theta_v}, & \eta = v + \dfrac{e^{2\theta}}{\theta_u - e^{2\theta}\theta_v}, & \zeta = uv + \dfrac{e^{2\theta}u + v}{\theta_u - e^{2\theta}\theta_v}, \\ x' = u + \dfrac{1}{\theta_u}, & y' = v - \dfrac{1}{\theta_v}, & z = \left(u + \dfrac{1}{\theta_u}\right)\left(v - \dfrac{1}{\theta_v}\right), \\ \bar{\xi} = u + \dfrac{1}{\theta_u + e^{2\theta}\theta_v}, & \bar{\eta} = v - \dfrac{e^{2\theta}}{\theta_u + e^{2\theta}\theta_v}, & \bar{\zeta} = uv - \dfrac{e^{2\theta}u - v}{\theta_u + e^{2\theta}\theta_v}. \end{cases} \tag{48}$$

Wir stellen fest:

Die mittels des Integrals θ *von* (47) *durch* $u' = u + \frac{1}{\theta_u}$, $v' = v - \frac{1}{\theta_v}$ *definierte Abbildung der linearen Kongruenz auf sich selbst, der die viergliedrigen Laplaceschen Zyklen von Su entspringen, erzeugt, als Abbildung des Paraboloids* $z = xy$ *auf sich selbst gedeutet, den neuen Laplaceschen Zyklus.*

In anschaulicher Weise wird der Übergang durch die folgende Konstruktion vermittelt:

Man bilde die Netze (α, β) *der Zyklen von Su durch die Strahlen* u, v *und* u', v' *der linearen Kongruenz auf die Mittelebene* $z = 0$ *ab und von dort aus durch Errichten der Lote auf das Paraboloid.*

6. *Hazzidakissche Flächenpaare von konstanter positiver Krümmung.* Die Veränderlichen u, v seien jetzt nicht auf den reellen Bereich beschränkt. Dem zu beweisenden Satz geben wir ohne Rücksicht auf die Realitätsverhältnisse im Raume die folgende Fassung:

Ist θ *wieder Integral der Differentialgleichung*

$$e^{-\theta}(e^{-\theta})_{uu} + e^{\theta}(e^{\theta})_{vv} = 0 \tag{49}$$

und wird wie bisher

$$u' = u + \frac{1}{\theta_u}, \qquad v' = v - \frac{1}{\theta_v} \tag{50}$$

gesetzt, so definieren die beiden Differentialformen mit der Krümmung 1

$$(51)\qquad \begin{cases} \text{(I)} & \dfrac{4du'\,du}{(u'-u)^2} = -4[\theta_{uu} - (\theta_u)^2]\,du^2 - 4\theta_{uv}\,du\,dv\,, \\ \text{(II)} & \dfrac{4dv'\,dv}{(v'-v)^2} = 4\theta_{uv}\,du\,dv + 4[\theta_{vv} + (\theta_v)^2]\,dv^2 \end{cases}$$

ein Hazzidakisches Paar; das soll heißen: Eine jede von ihnen ist das Quadrat des Linienelements der sphärischen Abbildung für eine auf die Kugel vom Radius 1 *abwickelbare Fläche, deren* ds^2 *durch die andere Form dargestellt wird.*

Eine Bemerkung allgemeinerer Art möge dem eigentlichen Beweise vorangehen. Zwei Einheitskugeln seien *flächentreu* aufeinander bezogen. Zu Variablen u, v machen wir einen Minimallinienparameter der einen Kugel und einen der anderen, so daß also, zugleich mit der Festsetzung $F_2^2 = F_1^2$, die Formeln

$$(52)\quad \text{(I)}\ \frac{4du'\,du}{(u'-u)^2} = E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv, \qquad \text{(II)}\ \frac{4dv'\,dv}{(v'-v)^2} = 2F_2\,du\,dv + G_2\,dv^2$$

gelten. Wir beachten, daß sich stets die Bedingung

$$(53)\qquad F_2 = -F_1$$

durch geeignete Auswahl von u und v erfüllen läßt; hat man nämlich zunächst $F_2 = F_1$, so genügt es, v mit v' zu vertauschen. Infolge von (53) wird

$$\frac{u'_v}{(u'-u)^2} = -\frac{v'_u}{(v'-v)^2}.$$

An diese Relation knüpft sich wieder die Einführung der Größe

$$\theta = \int\left(\frac{du}{u'-u} - \frac{dv}{v'-v}\right).$$

Demnach bestehen im Fall der flächentreuen Abbildung bereits die Formeln (50), (51), in denen aber $\theta(u, v)$ noch willkürlich bleibt.

Nach dieser Vorbereitung lösen wir die Aufgabe, zu den vorläufig nur durch (52) dargestellten, mittels $u' = u'(u, v)$, $v' = v'(u, v)$ punktweise aufeinander bezogenen Einheitskugeln (I) und (II) Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L, M, N so zu bestimmen, daß (I) das sphärische Bild wird und die Form (II) das Linienelement der Fläche liefert, die dann also Biegungsfläche der Kugel vom Radius 1 ist. Als erste Bedingung hat man [10]):

$$LN - M^2 = -F_1^2 = -F_2^2\,,$$

so daß der vorstehenden Bemerkung gemäß die Annahme (53) auf jeden Fall zulässig ist. Gleichzeitig wird jetzt nach (51)

$$(54)\qquad \begin{cases} E_1 = -4[\theta_{uu} - (\theta_u)^2], & F_1 = -2\theta_{uv}, & G_1 = 0, \\ E_2 = 0, & F_2 = 2\theta_{uv}, & G_2 = 4[\theta_{vv} + (\theta_v)^2]\,. \end{cases}$$

Da allgemein das Quadrat des sphärischen Linienelementes eine lineare Kombination der ersten und zweiten Fundamentalform der Fläche mit $-K$ und $-H$ als Koeffizienten ist (K das Krümmungsmaß, H die mittlere Krümmung; $K = 1$, $H \neq 0$), so folgert man aus (53): $M = 0$ [11]); d. h. die Kurven (u, v) bilden auf der Biegungsfläche ein konjugiertes

---

[10]) Sind, wie üblich, E, F, G, L, M, N die sechs Fundamentalgrößen der Fläche, e, f, g die Koeffizienten des sphärischen Linienelements, so ist

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{eg - f^2}{LN - M^2}.$$

[11]) Es handelt sich um die mittlere der drei Formeln:

$$e = -KE - HL, \qquad f = -KF - HM, \qquad g = -KG - HN.$$

System. Zu

$$LN = -4(\theta_{uv})^2\,, \qquad M = 0 \tag{55}$$

tritt noch eine weitere endliche Gleichung hinzu [12]):

$$E_1 N = G_2 L\,. \tag{56}$$

Auf Grund von (55) werde gesetzt:

$$L = 2e^{\omega}\theta_{uv}, \qquad N = -2e^{-\omega}\theta_{uv}. \tag{57}$$

In diesen Ausdrücken ist ω so zu bestimmen, daß neben der Relation (56) die Codazzischen Differentialgleichungen erfüllt sind, die im Falle konjugierter Parameterkurven die folgende Gestalt haben:

$$L_v - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} L + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} N = 0, \qquad N_u + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} L - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} N = 0. \tag{58}$$

Dabei bleibt es sich gleich, ob die aus dem Linienelement der Fläche berechneten Christoffelschen Symbole oder, wie es hier geschehen soll, die zur Bildkugel gehörigen eingesetzt werden. Durch einfache Rechnung ergibt sich:

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_1 = 0, \quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_1 = 0, \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_1 = \frac{\theta_{uuv}}{\theta_{uv}} - 2\theta_u. \tag{59}$$

Zu erläutern ist die Aufstellung eines geeigneten Ausdruckes für

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_1 = -\frac{1}{2F_1^2}[-F_1(E_1)_u + 2E_1(F_1)_u - E_1(E_1)_v]. \tag{60}$$

Man kann (56) folgendermaßen schreiben:

$$E_1 e^{-2\omega} = -4[\theta_{vv} + (\theta_v)^2] \tag{61}$$

und erhält durch Differenzieren nach u:

$$(E_1)_u = 2\omega_u E_1 - 4e^{2\omega}(\theta_{uvv} + 2\theta_{uv}\theta_v).$$

Dieser Wert ist in (60) einzutragen, während $(E_1)_v$ und $(F_1)_u$ direkt aus den Formeln (54) zu bilden sind. Man findet so:

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_1 = e^{2\omega}\left(\frac{\theta_{uvv}}{\theta_{uv}} + 2\theta_v\right) + \frac{E_1}{2\theta_{uv}}(2\theta_u - \omega_u). \tag{62}$$

Mittels (57), (59), (62) reduzieren sich dann die Codazzischen Gleichungen (58) auf $\omega_u = 2\theta_u$, $\omega_v = 2\theta_v$, so daß unter Einbeziehung der additiven Konstanten in θ sich $\omega = 2\theta$ ergibt. Wir haben demnach:

$$L = 2e^{2\theta}\theta_{uv}, \qquad M = 0, \qquad N = -2e^{-2\theta}\theta_{uv}, \tag{63}$$

während die einzige noch zu erfüllende Relation aus (56) bzw. (61) hervorgeht:

$$e^{-2\theta}[\theta_{uu} - (\theta_u)^2] = e^{2\theta}[\theta_{vv} + (\theta_v)^2].$$

Das ist aber die Differentialgleichung (49). Man erkennt unmittelbar, daß sich die Ausdrücke (63) für L, M, N genau ebenso als zweite Fundamentalgrößen einer zweiten Biegungsfläche der Kugel auffassen lassen, für die von den Formen (51) jetzt (I) das Quadrat des Linienelements und (II) das Quadrat des Linienelementes der sphärischen Abbildung ist. Unser Satz ist damit bewiesen. Zugleich haben wir in (49) eine *neue Differentialgleichung zur Bestimmung der Flächen von konstanter Krümmung*, die sich übrigens von der geläufigen nicht nur in den Variablen, sondern auch in der gesuchten Funktion unterscheidet. Auf den beiden Flächen des Hazzidakisschen Paares sind die

---

[12]) Sie folgt aus der dritten der für $M = 0$ geltenden Formeln, von denen, wie ersichtlich, die beiden ersten bereits erfüllt sind:

$$E = \frac{gL^2}{eg - f^2}, \qquad F = -\frac{fLN}{eg - f^2}, \qquad G = \frac{eN^2}{eg - f^2}.$$

Asymptotenlinien nach (63) durch $\frac{dv}{du} = \pm e^{2\theta}$, also gemäß (19) (natürlich mit Unterdrückung des Zeichens $||$ in den Wurzeln) durch Quadraturen gegeben.

Die Bestimmung der Biegungsflächen aus den Bildkugeln und L, M, N erfordert nur Quadraturen. Diese Aufgabe soll nicht im einzelnen durchgeführt werden. Doch sei bemerkt, daß dabei gewisse von θ abhängige Ausdrücke auftreten, die infolge von (49) exakte Differentiale werden, insbesondere:

$$2e^{2\theta}\theta_u\theta_v du + [e^{-2\theta}(\theta_u)^2 + e^{2\theta}(\theta_v)^2]\, dv, \qquad [e^{-2\theta}(\theta_u)^2 + e^{2\theta}(\theta_v)^2]\, du + 2e^{-2\theta}\theta_u\theta_v dv\,.$$

Sind wieder wie im voraufgegangenen Hauptteil unserer Untersuchung u, v und θ reell, so hat für den betreffenden idealen Bereich der Bildkugel (I) der laufende Punkt zwei reelle Koordinaten und eine rein imaginäre:

$$X = \frac{u'u - 1}{u' - u}, \qquad Y = \frac{u' + u}{u' - u}, \qquad Z = i\frac{u'u + 1}{u' - u}.$$

Die zugehörige imaginäre Biegungsfläche läßt sich dann durch eine zu ihr affine reelle Fläche ersetzen, bei der an die Stelle des Quadrats des Linienelements der Ausdruck $dx^2 + dy^2 - dz^2$ tritt. Solche „Flächen von konstanter Krümmung im parabolischen Raume mit indefinitem ds^2" hat auch Bianchi betrachtet, und zwar vor Aufstellung seiner allgemeinen Transformation B_k im Zusammenhang mit dem Biegungsproblem für die Paraboloide [13]).

7. *Sonderfall eines viergliedrigen Laplaceschen Zyklus, in dem gegenüberliegende Netze die gleichen geradlinigen Flächen zweiten Grades bedecken.* Es liegt nahe, Lösungen von (49) auf Grund des Ansatzes $e^{\theta} = \frac{f_2(v)}{f_1(u)}$ zu suchen; das imaginäre Hazzidakissche Paar artet dann aus. Wir finden:

$$(64) \qquad e^{2\theta} = C\,\frac{v^2 + 2a_2v + b_2}{u^2 + 2a_1u + b_1}, \qquad C^2 = -\frac{a_1^2 - b_1}{a_2^2 - b_2},$$

und setzen $C^2 > 0$, also etwa

$$(65) \qquad a_1^2 - b_1 > 0, \qquad a_2^2 - b_2 < 0$$

voraus. Aus (50) ergeben sich die bilinearen Beziehungen:

$$(66) \qquad u'u + a_1(u' + u) + b_1 = 0, \qquad v'v + a_2(v' + v) + b_2 = 0\,.$$

Die so erhaltenen Laplaceschen Zyklen sind durch (16) und (48) dargestellt; die Netze sind beidemal durch $\frac{dv}{du} = \pm e^{2\theta}$ bestimmt. Wir beschränken uns auf den in Art. 5 behandelten, zweiten Typus und stellen für den vorliegenden Spezialfall zunächst fest:

Werden durch (66) *die Geradenscharen einer Regel-F^2 involutorisch gepaart, wobei die Doppelstrahlen für die eine Schar reell, für die andere imaginär sein sollen, so beschreiben die damit einander zugeordneten Punkte u, v und u', v' der F^2 die gegenüberliegenden Netze eines reellen viergliedrigen Laplaceschen Zyklus.*

Wir werden weiter zeigen:

Auch die dazwischengeschalteten Netze bedecken ein und dieselbe geradlinige F^2, welche zusammen mit der gegebenen demjenigen F^2-Büschel angehört, der die beiden Paare der Doppelstrahlen zum Basisvierseit hat.

Da uns das Paraboloid $z = xy$ als Repräsentant einer beliebigen Regel-F^2 dient, bedeutet es, von diesem Standpunkt gesehen, keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir, (65) vorausgesetzt, durch eine reelle Affinität, die das Paraboloid als Ganzes

[13]) L. Bianchi, Sulla deformazione dei paraboloidi, Annali di Mat. (3) **9** (1903), S. 247.

ungeändert läßt, die Doppelstrahlen in die Geradenpaare $u = \pm 1$ und $v = \pm i$, d. h.

$$x = \pm 1, \quad y \mp z = 0 \quad \text{und} \quad y = \pm i, \quad x \pm iz = 0 \tag{67}$$

verlegen. Die Relationen (66) reduzieren sich dann auf:

$$u' = \frac{1}{u}, \qquad v' = -\frac{1}{v}. \tag{68}$$

Wir sind damit im Besitz eines durch Einfachheit der Darstellung ausgezeichneten viergliedrigen Laplaceschen Zyklus, der übrigens gleichzeitig, wie aus der Korrespondenz der Erzeugenden folgt, ein W-Quadrupel bildet:

$$(69)\quad \begin{cases} x = u, \quad y = v, \quad z = uv; \quad \xi = \dfrac{uv+1}{u+v}, \quad \eta = \dfrac{uv-1}{u+v}, \quad \zeta = \dfrac{-u+v}{u+v}; \\ x' = \dfrac{1}{u} \quad y' = -\dfrac{1}{v}, \; z' = -\dfrac{1}{uv}; \; \bar{\xi} = \dfrac{-uv+1}{u-v}, \quad \bar{\eta} = \dfrac{uv+1}{u-v}, \quad \bar{\zeta} = \dfrac{u+v}{u-v}. \end{cases}$$

Die Netze des Zyklus, sowie die irgendeines aus ihm durch eine Raumkollineation hervorgehenden sind bestimmt durch:

$$\frac{du}{u^2-1} \pm \frac{dv}{v^2+1} = 0, \quad \text{d. i.} \quad \frac{u-1}{u+1} \cdot e^{\pm 2 \operatorname{arc\,tg} v} = \text{const.} \tag{70}$$

Träger der von den Punkten ξ und $\bar{\xi}$ durchlaufenenen Netze ist das Hyperboloid

$$\xi^2 - \eta^2 + \zeta^2 = 1. \tag{71}$$

Paraboloid und Hyperboloid durchdringen sich in den Geradenpaaren (67) als gemeinschaftlichen Erzeugenden, die somit als Basisvierseit des F^2-Büschels

$$xy - z + k(x^2 - y^2 + z^2 - 1) = 0 \tag{72}$$

erscheinen. Zugleich mit (68) ist eine gescharte Involution

$$x' = \frac{y}{z}, \qquad y' = -\frac{x}{z}, \qquad z' = -\frac{1}{z} \tag{73}$$

definiert, die sowohl das Paraboloid wie das einschalige Hyperboloid in der durch den Laplaceschen Zyklus gegebenen Zuordnung der gegenüberliegenden Punkte auf sich selber abbildet. Sie wird durch die Strahlen der elliptischen linearen Kongruenz vermittelt, deren Fokalgeraden die konjugiert imaginären Diagonalen $x \pm iy = 0, z = \pm i$ des Basisvierseits sind. Die Strahlenpaare xx' und $\xi\bar{\xi}$ sind reziproke Polaren in bezug auf das Paraboloid und das Hyperboloid und zu gleicher Zeit auch in bezug auf jede weitere F^2 des Büschels.

An die Stelle des Paraboloids $z = xy$, von dem wir ausgegangen sind, kann nun aber eine beliebige Fläche des F^2-Büschels (72) treten, die dann gleichfalls durch die gescharte Involution (73) in sich übergeführt wird. Wir unterwerfen demnach den Laplaceschen Zyklus (69) der von einer Konstanten $\varkappa$ abhängigen gescharten Kollineation mit den gleichen imaginären Leitgeraden:

$$X = \frac{x + \varkappa y}{1 + \varkappa z}, \qquad Y = \frac{-\varkappa x + y}{1 + \varkappa z}, \qquad Z = \frac{z - \varkappa}{1 + \varkappa z} \tag{74}$$

und gelangen so zu einer einfach-unendlichen Schar von Zyklen, denen die Diagonalen (die Strahlenpaare xx', $\xi\bar{\xi}$ der linearen Kongruenz) gemeinsam sind. Innerhalb derselben besteht dann Korrespondenz der Netze, sowie der Erzeugenden der von den Netzen doppelt überdeckten, dem F^2-Büschel angehörigen Flächenpaare. Zu der polaren Paarung der Strahlen in der linearen Kongruenz tritt also noch eine, wie wir sagen wollen, *harmonische* Paarung der F^2 des Büschels hinzu. Man erkennt nämlich, daß die Punkte x und x' des Paraboloids $z = xy$ und die Schnittpunkte des Strahls xx' mit dem Hyperboloid (71)

harmonisch liegen. Diese Beziehung überträgt sich durch die Kollineation (74) auf alle übrigen, Laplacesche Zyklen bildende Flächenpaare des Büschels [14]). Deutet man insbesondere die Formeln (74) als die aus dem Paraboloid hervorgehende F^2 des Büschels, so wird für diese in (72) $k = \frac{\varkappa}{1 - \varkappa^2}$, während für die andere Fläche des Paares die Büschelkonstante den Wert $k_1 = -\frac{1}{4k}$ hat.

Aus dem zuletzt dargelegten Sachverhalt ist schließlich noch zu entnehmen, daß hier wieder ein im Sinne des Art. 2 *spezieller*, zusammengesetzter W-Verband vorliegt, der die ∞^1 viergliedrigen Laplaceschen Zyklen als ausgezeichnete W-Quadrupel enthält. Diese fallen danach also gleichzeitig unter den von Su gefundenen Typus, wobei aber auf die gegen Art. 3 veränderten Realitätsverhältnisse und auf die abweichende Bedeutung der Variablen u, v hinzuweisen ist.

[14]) Zur Erläuterung sei noch bemerkt, daß der Strahl der linearen Kongruenz die gesamten F^2 des Büschels in den Punktepaaren einer elliptischen Involution schneidet und daß in einer solchen, wie bekannt, zu einem jeden Punktepaar ein eindeutig bestimmtes, reelles zweites Paar existiert, durch das es harmonisch getrennt wird.

Eingegangen 7. Dezember 1937.

Grundlegung einer Theorie der reellen Inzidenzabbildungen in endlichen projektiven Geometrien. I.

(Eine geometrische Deutung der zyklischen Gruppen.)

Von *Max Steck* in München.

§ 1. Fragestellung. Grundlagen.

1. Mit rein geometrischen Methoden, die axiomatisch nur Inzidenzaussagen benützen, und insbesondere ohne Heranziehung der Theorie der Elementarteiler, hat R. Baldus eine vollständige Klassifikation der ebenen und (dreidimensional-)räumlichen Kollineationen gegeben [1]). Es ergaben sich dabei für die Ebene mit Einschluß der identischen Kollineation sechs verschiedene *Typen* (I)—(VI), von denen jeder rein geometrisch durch eine *bestimmte* (Inzidenz-) *Konstellation der Doppelelemente* (Fixpunkte und Fixgeraden) *gekennzeichnet* werden konnte (s. a. a. O. [1]) Fig. 2, S. 379). Dabei konnte ferner nachgewiesen werden, daß die jeweilige Konstellation der Fixelemente einer ebenen Kollineation *in sich dual* ist (Baldusscher Satz 2, S. 381).

Diese letztere Tatsache läßt die Untersuchung der ebenen Kollineationen in einer endlichen ebenen projektiven Geometrie eines Veblensystems [2]) $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ als fruchtbar erscheinen, da die Veblensysteme als Ganzes in sich dual (d. h. durch *involutorisch-reziproke* Inzidenztafeln darstellbar) sind. In der Tat haben auch bereits O. Veblen und W. Bussey [3]) Kollineationen in den von ihnen behandelten speziellen endlichen ebenen projektiven Geometrien [4]) (deren erzeugendes *Galoisfeld* Primzahl- oder Primzahl-

[1]) R. Baldus, Zur Klassifikation der ebenen und räumlichen Kollineationen, Sitz. Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss. (math.-nat. Abt.) 1928, 375—395.

[2]) s. M. Steck, Über finite Geometrien und ihren Zusammenhang mit der Axiomatik der projektiven Geometrie, Deutsche Math. **1** (1936), 578—588, insb. §5. — In dieser Arbeit habe ich die Veblensysteme $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ aus $n^2 - n + 1$ Punkten und ebensovielen Geraden, wobei jeder Punkt Träger eines linearen Strahlbüschels aus genau n Geraden und jede Gerade mit genau n Punkten belegt ist ($n = 2, 3, 4, \ldots$), in einen allgemeinen geometrischen Zusammenhang eingeordnet, die sie kennzeichnende Axiomatik (Axiome **E**, **A. 1***, **A. 2***), ihre Theorie und ihre Aufstellung ausführlich entwickelt.

[3]) O. Veblen u. W. Bussey, Finite projective geometries, Trans. Am. Math. Soc. **7** (1906), 241—259, insb. §§ 5—7.

[4]) Für die systematische Aufstellung der Inzidenztafeln dieser Veblensysteme hat G. Fano im Anschluß an seine frühere Arbeit (Sui postulati fondamentale della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni, Giorn. di mat. **30** (1892), 106—132) in zwei soeben erschienenen Noten (Osservazioni su alcune „geometrie finite", Rend. d. R. Accad. Naz. dei Linc. **26** (1937), 55—60, 129—134) eine allgemeine, sehr durchsichtige Methode angegeben, so daß das Problem der expliziten Aufstellung der Inzidenztafeln dieser Veblensysteme damit als endgültig gelöst zu betrachten ist (vgl. auch A. Comessatti, Note critiche sui postulati delle geometria proiettiva, Rend. Sem. R. U. Padova **1** (1930), 196). Die Fanosche Methode berührt sich teilweise mit der früher von W. Heuser in seiner von H. Liebmann und mir angeregten Heidelberger Dissertation (Über die Möglichkeit finiter Geometrien und die Geltung der projektiven Lagebeziehungen in ihnen, 1934, 42 S.) entwickelten, ist aber allgemeiner und daher in diesem Zusammenhang von größerer Tragweite.

potenzordnung hat) als „Punkttransformationen, die Geraden in Geraden überführen" definiert, teilweise ihre allgemeinen gruppentheoretischen Eigenschaften untersucht und ihre analytischen Fassungen gegeben [5]), wodurch insbesondere die *Gleichberechtigung* der Elemente der von beiden Forschern u. a. [6]) untersuchten speziellen endlichen ebenen projektiven Geometrien (Überführbarkeit durch Kollineationen in sich oder in konfigurationstheoretisch *aequivalente* Systeme) gesichert worden ist. Die allgemeinen Aussagen über Kollineationen in diesen Veblensystemen gewinnen Veblen und Bussey im Sinne und mit Methoden, die denen der gewöhnlichen *komplexen* projektiven Geometrie analog sind; ihr analytischer Formalismus wird auch den Untersuchungen in endlichen projektiven Geometrien zugrunde gelegt.

Daher konnte und kann von (ebenen) Kollineations*typen* mit vollständiger Klärung der Realitätsverhältnisse bei den genannten diesbezüglichen, in der Hauptsache analytisch durchgeführten Untersuchungen nicht gesprochen werden. Dies lag weiterhin — in der Sprache der axiomatisch aufgebauten synthetischen Geometrie ausgedrückt — daran, daß das „Netz", mit dessen Hilfe die dort als Kollineationen bezeichneten Abbildungen in diesen endlichen projektiven Geometrien $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ konstruiert wurden [7]), nicht *alle*, in der gewöhnlichen projektiven Geometrie für *jede* Gerade axiomatisch geforderten Anordnungseigenschaften (insbesondere Erfülltsein des Paschschen Axioms **II.** 4.) [8]) aufweist. Die Entwicklung einer vollständigen Theorie der ebenen Kollineationen in den endlichen projektiven Geometrien $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$, die auch zu einer vollständigen Klassifikation der ebenen Kollineationstypen und zu einer vollständigen Beherrschung der Realitätsverhältnisse kommt, macht gerade diese, zuerst von R. Baldus in der unter Anm. [8]) genannten Arbeit bewiesene Tatsache unmöglich, daß das einschneidende Paschsche Anordnungsaxiom **II.** 4 in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ nicht ausnahmslos erfüllt ist, weil $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ nur endlich viele (nämlich $n^2 - n + 1$ ($n = 2, 3, 4, \ldots$ endlich)) Punkte enthält, was mit der bekannten, ebenfalls von R. Baldus in der genannten Arbeit (Satz 9, S. 160) bewiesenen Tatsache übereinstimmt, daß man aus den Axiomen der *absoluten* Geometrie (d. s. Hilberts Axiome der Verknüpfung, Anordnung, Kongruenz (**III.** 1 und **III.** 3 in den von Baldus modifizierten Fassungen), dem Archimedischen Axiom **V.** 1 und dem Cantorschen Axiom) *nur mit Verwendung des Axioms von Pasch* beweisen kann:

a) die Menge der Punkte ist unendlich (ebenso die der Geraden und der Ebenen);

b) den Satz von Moore;

c) die Zweiteilung der Geraden durch irgendeinen ihrer Punkte, einer Ebene durch irgendeine ihrer Geraden, des Raumes durch irgendeine Ebene;

d) daß es ein vollständiges Viereck gibt, dessen Nebenecken nicht in einer Geraden liegen,

wobei „axiomatisch bemerkenswert ist, daß es sich dabei in a) und d) um Sätze handelt, die keine Anordnungsaussagen enthalten, und die trotzdem nur mittels des Anordnungsaxioms **II.** 4 bewiesen werden können".

2. Sieht man aber bewußt von den genannten Erfordernissen ab (Erfülltsein *aller* Anordnungsaxiome [9]) **II.** 1—**II.** 4 für *alle* Punkte und *alle* Geraden) und beschränkt man

---

[5]) Vgl. O. Veblen, Collineations in a finite projective geometry, Trans. Am. Math. Soc. **8** (1907), 366—368.

[6]) s. U. G. Mitchell, Geometry and collineation groups of the finite projective plane, P. G. (2,2) [$\equiv \boldsymbol{S}(21/2/5)$], Princeton 1910; H. H. Mitchell, Linear groups and finite geometries, Am. Math. Monthly **42** (1935), 592—603; E. R. Ott, Finite projective geometries P. G. (k, p^n), Am. Math. Monthly **44** (1937), 86—92.

[7]) Vgl. die unter Anm. [3]) genannte Arbeit, S. 247.

[8]) R. Baldus, Zur Axiomatik der Geometrie IV: Die Tragweite des Axioms von Pasch, Sitz. Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss. (math.-nat. Abt.) 1934, 145—161, insb. § 2, S. 153.

[9]) Etwa in der Hilbertschen Fassung II. 1—II.4 (Grundl. d. Geometrie, 7. Aufl., Leipzig-Berlin 1930).

sich darauf, reine Inzidenzschlüsse zu verwenden, d. h. allein aus den Inzidenzaxiomen **A. 1*** und **A. 2*** (s. unten und Anm. [2])) Folgerungen zu ziehen, so kann man in den endlichen projektiven Geometrien der Veblensysteme $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$, wie wir zeigen werden, sehr wohl *reelle Abbildungen* der gleichnamigen Elemente aufeinander (Punkte auf Punkte, Geraden auf Geraden) mit Erhaltung der Inzidenzen (Kollinearbeziehungen) untersuchen und mit Hilfe eines durch reine Inzidenzeigenschaften, letztlich also durch die Inzidenzaxiome **A. 1*** und **A. 2*** selbst bestimmten und aufgebauten *endlichen, vollständigen reellen Möbiusschen Netzes* definieren und explizit konstruieren (s. unter **5**). Von diesen, den *ebenen* Kollineationen in der gewöhnlichen projektiven Geometrie entsprechenden Abbildungen mit Erhaltung der Inzidenzen in den endlichen projektiven Geometrien der Veblensysteme $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ sprechen wir als von *endlichen ebenen reellen Inzidenzabbildungen* oder kurz von reellen Inzidenzabbildungen. Ihre genaue Definition formulieren wir im § 2. *Eine Grundlegung ihrer Theorie und ihre Einteilung in Typen zu geben, sei der Gegenstand der vorliegenden Arbeit.* Dabei werden wir gleichzeitig zu einer einfachen reell-geometrischen Deutung der zyklischen Gruppen geführt werden, die u. W. noch nicht bekannt sein dürfte.

3. Die endlichen projektiven Geometrien der Veblensysteme $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ sind bekanntlich mittels der folgenden Axiome aufgebaut (s. Anm. [2])):

E. *Es gibt mindestens je* $n^2 - n + 1$ *mit* $n = 2, 3, 4, \ldots$ (endlich) (als verschieden unterscheidbare) *zwei verschiedenen Dingsystemen angehörende Elemente: Punkte und Geraden* [10]).

A. 1*. *Durch zwei* (als verschieden unterschiedene) *Punkte ist stets genau eine Gerade bestimmt.*

A. 2*. *Durch zwei* (als verschieden unterschiedene) *Geraden ist stets genau ein Punkt bestimmt.*

$\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ ist dann, falls es überhaupt realisierbar ist, auf Grund dieser Axiome durch eine (*involutorisch-reziproke*) *Inzidenztafel* definiert und repräsentiert. Ihre Zeilen entsprechen den bezifferten Punkten $1, 2, 3, \ldots, n^2 - n + 1$, ihre Kolonnen den bezifferten Geraden $(1), (2), \ldots, (n^2 - n + 1)$. $\times$ ist das Inzidenzzeichen.

Nennt man dann die den $n^2 - n + 1$ Zeilen entsprechenden „Punkte" Punkte im gewöhnlichen Sinne und die Punkte einer jeden der $n^2 - n + 1$ Kolonnen der Tafel — in formallogisch einwandfreier und widerspruchsloser Weise — *kollinear* (= eine Gerade bildend), und bezeichnet ferner das in den Axiomen **A. 1*** und **A. 2*** vorkommende Wort „bestimmt" hier die *Inzidenz*, die durch das Inzidenzzeichen $\times$ symbolisiert werde, so ist jetzt der für das folgende wichtige Zusammenhang hergestellt.

4. Nach der im § 2 mittels der Axiome **A. 1***, **A. 2*** zu gebenden Erklärung des Begriffs der *reellen Inzidenzabbildung* in einem Veblensystem $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ ist die folgende Frage- und Aufgabenstellung überhaupt erst sinnvoll. Ich meine die Aufgabe der *Bestimmung des Minimalmodells* einer ebenen endlichen projektiven Geometrie, in der es mindestens die sämtlichen, den ebenen Baldusschen Kollineationstypen (I)—(VI) entsprechenden Typen reeller Inzidenzabbildungen gibt. Diese Fragestellung und ihre Lösung sei der Gegenstand einer folgenden Arbeit.

Die genannte Bestimmung der sämtlichen möglichen Typen reeller Inzidenzabbildungen in einem endlichen ebenen Bereich von projektivem Zusammenhang ist nicht

[10]) In dieser allgemeinen sprachlichen Fassung, die für den unter **4** genannten Einbau der Ergebnisse in den endlichen projektiven Geometrien der Veblensysteme $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ in die Aussagenmannigfaltigkeit der gewöhnlichen projektiven Geometrie geeigneter ist — worauf mich in dankenswerter Weise Herr Baldus aufmerksam gemacht hat —, hätte ich das Existentialaxiom **E** meiner früheren Arbeiten (s. folgende Anm.) formulieren können, um auf diesen Einbau gleich axiomatisch hinzuweisen.

nur an sich, sondern insbesondere für die *Axiomatik der reellen und komplexen ebenen projektiven Geometrie* von grundlegender Bedeutung und Tragweite, da man Ausschnitte eines jeden Veblensystems in die gewöhnliche projektive Geometrie auf Grund der die Veblensysteme kennzeichnenden Axiomatik (**E, A. 1*, A. 2***) *einbauen* (einbetten) kann und damit im *unendlichen* Bereich der projektiven Ebene die Struktur eines *endlichen* Punkt-Geraden-Feldes kennt, das als Minimalfeld oder Ausschnitt eines solchen für die geometrische Realisierung irgendeiner Aussagengruppe der gewöhnlichen projektiven Geometrie in Frage kommt [11]). Durch solche *Minimalmodelle* beherrscht man nämlich, wie die diesbezüglichen Arbeiten von R. Baldus und meine Untersuchungen (s. Anm. [11])) zeigen, den sonst (etwa bei Hilbert) nur analytisch (durch geeignete Zahlensysteme, deren Deutung sogenannte *Ausfallgeometrien* liefert) und da kompliziert zu fassenden *Problemkreis der axiomatischen Unabhängigkeit* und seine vollständige Lösung *rein geometrisch* und in einfachster Weise, unter strenger Einhaltung der geometrisch-axiomatischen Methode.

Kap. I. Grundlinien einer Theorie der reellen Inzidenzabbildungen.

§ 2. *Definition der reellen Inzidenzabbildungen in* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$. *Allgemeine Sätze.*

5. Die endlichen ebenen reellen Inzidenzabbildungen in den endlichen projektiven Geometrien der Veblensysteme $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ erklären wir jetzt folgendermaßen:

Definition D. 1. *In einer endlichen ebenen projektiven Geometrie eines Veblensystems* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ $(n = 2, 3, 4, \ldots)$, *das mittels der Axiome* **E, A. 1*, A. 2*** *aufgebaut ist, heißt jede reelle Beziehung der Ebene des Systems auf sich eine endliche ebene reelle Inzidenzabbildung* $\boldsymbol{T}$ *dann und nur dann, wenn folgende, die Herstellung von* $\boldsymbol{T}$ *erklärende geometrische Konstruktion innerhalb des Systems* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *für alle beliebigen Paare von Punktquadrupeln* $\{i, j, k, l\}$ *und* $\{i', j', k', l'\}$ *mit*

$$i, j, k, l = 1, 2, 3, \ldots, n^2 - n + 1, \quad i', j', k', l' = 1, 2, 3, \ldots, n^2 - n + 1,$$

die außerdem noch den an sie gestellten folgenden Bedingungen genügen, explizit durchführbar ist:

Sind i, j, k, l $(i \neq j, j \neq k, k \neq l, i \neq l, j \neq l)$ *Punkte des Systems* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$, *von denen keine drei kollinear liegen, so seien* i', j', k', l' *aus* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *mit* $i' \neq j'$, $j' \neq k'$, $k' \neq l'$, $i' \neq l'$, $j' \neq l'$ *ihre Bildpunkte, von denen wieder keine drei kollinear liegen. Dann heißen*

$$\left.\begin{matrix}(i', j') \times (k', l') \\ (i', l') \times (j', k') \\ (i', k') \times (j', l')\end{matrix}\right\} \begin{matrix}\text{die} \\ \text{Bildpunkte} \\ \text{von}\end{matrix} \left\{\begin{matrix}(i, j) \times (k, l) \\ (i, l) \times (j, k) \\ (i, k) \times (j, l).\end{matrix}\right.$$

Außerdem muß die weitere entsprechende Konstruktion auf mindestens eine Weise eindeutig zu jedem weiteren Punkt aus $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *den Bildpunkt aus* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *liefern.*

---

[11]) Vgl. die unter Anm. [8]) genannte Arbeit von R. Baldus und seine grundlegende axiomatische Arbeit: Ein Axiomensystem der komplexen projektiven Geometrie, Sitz. Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss. (math.-nat. Abt.) Jhg. 1933, 149—191, sowie meine diesbezüglichen Arbeiten: a) Eine vollständige endliche Geometrie des vollständigen Vierecks, Deutsche Math. **1** (1936), 588—592; b) Die Fundamentalsätze in der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems $\boldsymbol{S}(21/2/5)$, Monatsh. f. Math. u. Phys. **45** (1937), 320—331; c) Eine endliche minimale Pappus-Pascalsche Geometrie, Deutsche Math. **2** (1937), 242—251; d) Zur Axiomatik der reellen ebenen projektiven Geometrie I: Die Unabhängigkeit des Vertauschungsaxioms $\boldsymbol{V_2}$ von den Verknüpfungsaxiomen, Sitz. Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss. (math.-nat. Abt.) 1937, 1—17; e) Zur Axiomatik der reellen ebenen projektiven Geometrie II: Die Unabhängigkeit des E. P. Axioms und des S. K. Axioms von den Verknüpfungsaxiomen, Monatsh.f.Math. u. Phys. **46** (1937), 93—121.

Man hat dann zu zeigen, daß es Veblensysteme $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ gibt, in denen diese Konstruktion durchführbar ist, m. a. W. man hat den *Existenznachweis* von reellen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$ in mindestens einem Veblensystem zu führen. Dies beweisen wir im II. Kapitel dieser Arbeit an Hand des für $n = 3$ in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ eintretenden Veblensystems $\boldsymbol{S}(7/2/3)$, was genügt [12]).

6. Im Anschluß an **D. 1** geben wir folgende Verbaldefinition:

Definition D. 2. *Die eine Abbildung $\boldsymbol{T}$ herstellende Konstruktion heißt eine endliche reelle Möbiussche Netzkonstruktion in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$. Ein durch sie erhaltenes vollständig beziffertes* (alle Punkte und alle Geraden von $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ reell enthaltendes) *Netz heißt ein endliches reelles Möbiusnetz für $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$.*

Insbesondere heißt das durch ein bestimmtes festgehaltenes Ausgangsviereck $\{i, j, k, l\}$ nach der gegebenen Vorschrift konstruierte, vollständig bezifferte endliche Möbiusnetz das *Ausgangsnetz*, das ihm nach der Konstruktionsvorschrift wegen **A. 1*** und **A. 2*** in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ dann bekanntlich *eindeutig* entsprechende, aus dem bestimmten Bildviereck $\{i', j', k', l'\}$ durch analoge Konstruktionsmaßnahmen hergeleitete, vollständig bezifferte endliche reelle Möbiusnetz das *Bildnetz*.

Weil die Elemente eines jeden Veblensystems $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ gleichberechtigt sind (s. § 1), kann ein aufgefundenes Ausgangsnetz für die Untersuchung der Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$ in jedem System $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ festgehalten werden.

Aus den Definitionen **D. 1** und **D. 2** und aus **A. 1*** und **A. 2*** kann man jetzt unmittelbar den folgenden, auch die Namengebung rechtfertigenden Satz beweisen:

Satz 1. *Die reellen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$ erhalten sämtliche in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ auftretenden Inzidenzen, führen also die $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ definierende Inzidenztafel in sich* (oder in eine im Sinne der Konfigurationstheorie *aequivalente*) *über.*

Beweis. Um zu zeigen, daß die $\boldsymbol{T}$ inzidenzerhaltend sind, genügt es, den Satz etwa für Geraden als Inzidenzelemente ihrer Punkte zu beweisen, da in jedem $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ vollständige Dualität herrscht.

Dann folgt aus den Axiomen **A. 1*** und **A. 2*** und aus der Konstruktion von $\boldsymbol{T}$ mit Hilfe eines endlichen reellen Möbiusnetzes nach **D. 1**:

Ist ν ein beliebiger Punkt des Ausgangsnetzes $\{i, j, k, l\}$ in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ und etwa definiert als

$$\nu = (i_1, i_2) \times (i_3, i_4),$$

so ist nach sinngemäßer Anwendung der Konstruktionsvorschrift von **D. 1**

$$\nu' = (i_1', i_2') \times (i_3', i_4')$$

sein Bildpunkt. Die Gerade (i_1, i_2, ν) geht also in die Gerade (i_1', i_2', ν') über, ebenso (i_3, i_4, ν) in (i_3', i_4', ν'), womit alles gezeigt ist.

7. Des weiteren definieren wir jetzt:

Definition D. 3. *Fällt bei der durch* **D. 1** *beschriebenen Konstruktion eines endlichen reellen Möbiusnetzes ein Punkt m aus $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ mit seinem Bildpunkt m' zusammen ($m \equiv m'$), so heißt er Eigenbild oder Fixpunkt der Inzidenzabbildung $\boldsymbol{T}$.*

Aus **D. 1** und **D. 3** folgt zusammen mit **A. 1*** und **A. 2*** der

Satz 2. *Die endliche reelle ebene Inzidenzabbildung $\boldsymbol{T}$ in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ wird zur Eigenabbildung oder Identität* (identische Inzidenzabbildung), *wenn gleichzeitig*

$$i \equiv i', \quad j \equiv j', \quad k \equiv k', \quad l \equiv l' \quad \text{(Eigenbilder)}$$

gilt. Sie heißt dann als Typus $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}$.

---

[12]) Aus der Definition **D. 1** folgt, daß es in dem für $n = 2$ eintretenden Veblensystem $\boldsymbol{S}(3/2/2)$ nur *Ausartungen* reeller Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$ geben kann, deren Behandlung wir hier unterdrücken.

Beweis. Nach **A. 1*** und **A. 2*** entspricht einem Ausgangsnetz eindeutig dann ein Bildnetz, wenn zum Ausgangsviereck $\{i, j, k, l\}$ das Bildviereck $\{i', j', k', l'\}$ bekannt ist. Gilt also $i \equiv i'$, $j \equiv j'$, $k \equiv k'$, $l \equiv l'$, so geht bei der hierdurch bestimmten Abbildung $\boldsymbol{T}$ in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ jeder Punkt in sich über, wobei es trivial ist, daß sämtliche zwischen den Punkten bestehenden Inzidenzen (Geraden) erhalten bleiben.

§ 3. *Weitere allgemeine Aussagen über reelle Inzidenzabbildungen in* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$. (*Fixpunktfreie Inzidenzabbildungen und ihre zyklische Gruppe.*)

8. Es seien in einem bestimmten, für die folgenden Begriffsbildungen festgehaltenen Veblensystem $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ $[n = 3, 4, 5 \ldots]$ nach der Vorschrift der Definition **D. 1** reelle Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T} \neq \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}$ konstruierbar. Dann geht wegen Satz 1 jede Gerade aus $\boldsymbol{S}(n^2 - n + n/1/2/n)$ vermöge $\boldsymbol{T}$ wieder in eine Gerade über; einzelne Geraden können dabei sogar *in sich* übergehen (*Fixgeraden*). Da die Geraden von $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ durch das Axiom **A. 1*** (implizit) definiert sind, und jeder Fixpunkt in $\boldsymbol{T}$ definitionsgemäß (**D. 3**) sich selbst entspricht, so gilt bei Berücksichtigung der in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ durchgehenden vollständigen Dualität der

Satz 3. *Die Verbindungsgerade zweier Fixpunkte von* $\boldsymbol{T}$ *in* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *ist eine Fixgerade von* $\boldsymbol{T}$; *der Schnittpunkt zweier Fixgeraden von* $\boldsymbol{T}$ *in* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *ist ein Fixpunkt von* $\boldsymbol{T}$ $(n = 3, 4, 5, \ldots)$.

Dieser Satz ist für die nachfolgende Einteilung und Klassifikation der reellen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$ von $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ in einzelne *Typen* grundlegend. Ihm zufolge genügt es (bei Berücksichtigung der Gültigkeit von Satz 1) Zahl und Inzidenzkonstellation der einen Art von Fixelementen in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$, etwa die der *Fixpunkte von* $\boldsymbol{T}$ als Einteilungsgründe zu verwenden, wie dies im folgenden § 4 geschehen soll.

Es ist jedoch für diese rein formale Klassifikation der $\boldsymbol{T}$, wie sich zeigt, eine wesentliche Erleichterung der Übersicht über die einzelnen Typen reeller Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$, wenn man noch den folgenden Begriff einführt und die daran anknüpfende Aussage des Satzes 4 benützt.

9. Wir definieren:

Definition D. 4. *Ist in* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ $[n = 3, 4, 5, \ldots]$ *eine Fixgerade mit lauter* (also mit genau n) *Fixpunkten von* $\boldsymbol{T}$ *belegt, so heißt sie identisch auf sich bezogen.*

Unter Zugrundelegung dieser Definition und der Ergebnisse des § 2 gewinnt man dann den folgenden

Satz 4. *Ist die reelle Inzidenzabbildung* $\boldsymbol{T}$ *in* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *von der Identität* $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}$ *verschieden* $(\boldsymbol{T} \neq \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})})$, *so besitzt sie höchstens eine identisch auf sich bezogene* (Fix-) *Gerade.*

Beweis. Gäbe es nämlich in $\boldsymbol{T}$ zwei (verschiedene) identisch auf sich bezogene (Fix-)Geraden a und b und lägen etwa $i \equiv i'$, $j \equiv j'$ auf a, $k \equiv k'$, $l \equiv l'$ auf b, so wären wegen **A. 1*** und **A. 2*** und wegen Satz 3 die Voraussetzungen des Satzes 2 gegeben, die notwendig auf die identische Inzidenzabbildung $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}$ führen, im Widerspruch zu der Voraussetzung $\boldsymbol{T} \neq \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}$.

10. Wenn das Zeichen $\rightarrow$ den vermöge $\boldsymbol{T}$ gestifteten Übergang und Übergangssinn der zu seinen Seiten stehenden Elemente, und das Zeichen $\longleftrightarrow$ in diesem Zusammenhang das *Fixsein* der zu seinen Seiten stehenden (gleichen) Elemente in $\boldsymbol{T}$ von $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ bezeichnet, so beweisen wir jetzt den folgenden *allgemeinen Existenzsatz über reelle fixpunktfreie Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}$, die unter den Typen reeller Inzidenzabbildungen in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ offenbar eine besondere Stellung einnehmen; sie haben unter den ebenen Baldusschen Kollineationstypen (I)—(VI) offenbar kein Analogon. Der Satz lautet:

Satz 5. *In jeder endlichen projektiven Geometrie eines Veblensystems* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ $[n = 3, 4, 5, \ldots]$ *gibt es mindestens* $n^2 - n$ *fixpunktfreie Inzidenzabbildungen*

$$\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3, \ldots, \boldsymbol{T}_{n^2-n},$$

die einzeln explizit angebbar sind.

Beweis. Die Existenz von mindestens $n^2 - n$ reellen fixpunktfreien Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, n^2 - n)$ in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ beweisen wir jetzt durch ihre explizite Angabe in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ (Spaltenangabe). Es sind, weil die Inzidenztafel eines jeden Veblensystems $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *involutorisch-reziprok* ist, und daher immer auch in der Form der *diagonalen* Anordnung der Inzidenzzeichen $\times$ geschrieben werden kann, die folgenden:

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	·	·	·	T_{n^2-n}
$1 \to 2$	$1 \to 3$	$1 \to 4$	$1 \to 5$	$1 \to 6$				$1 \to n^2 - n + 1$
$2 \to 3$	$2 \to 4$	$2 \to 5$	$2 \to 6$	$2 \to 7$				$2 \to 1$
$3 \to 4$	$3 \to 5$	$3 \to 6$	$3 \to 7$	$3 \to 8$				$3 \to 2$
$4 \to 5$	$4 \to 6$	$4 \to 7$	$4 \to 8$	$4 \to 9$				$4 \to 3$
$5 \to 6$	$5 \to 7$	$5 \to 8$	$5 \to 9$	$5 \to 10$				$5 \to 4$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .				. . . . .
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . .				. . . . .
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . .				. . . . .
$n^2 - n \to n^2 - n + 1$	$n^2 - n \to 1$	$n^2 - n \to 2$	$n^2 - n \to 3$	$n^2 - n \to 4$				$n^2 - n \to n^2 - n$
$n^2 - n + 1 \to 1$	$n^2 - n + 1 \to 2$	$n^2 - n + 1 \to 3$	$n^2 - n + 1 \to 4$	$n^2 - n + 1 \to 5$				$n^2 - n + 1 \to n^2$

Hieraus und aus Satz 1 ergibt sich bei Benützung von Satz 3 der

Satz 6. *Jede der* $n^2 - n$ *im Satz* 5 *aufgewiesenen fixpunktfreien Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, n^2 - n)$ *von* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *ist auch fixgeradenfrei.*

11. Durch den eben bewiesenen Satz 5 und seinen Beweisgang sind wir nun auf ganz natürlichem Wege zu einer *Darstellung und geometrischen Deutung einer zyklischen Gruppe* geführt worden. Die Einführung der diesbezüglichen gruppentheoretischen Begriffsbildungen[13]), und die Identifizierung der identischen reellen Inzidenzabbildung $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}$ mit dem *Einheitselement* der Gruppe, erlaubt dann, aus dem Beweisgang des Satzes 5 den folgenden Satz zu folgern:

Satz 7. *In jeder endlichen projektiven Geometrie eines Veblensystems* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ $[n = 3, 4, 5, \ldots]$ *erzeugt jede der* (im Satz 5 angegebenen) *reellen fixpunktfreien Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}_\nu$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots, n^2 - n$, *als Gruppenelement aufgefaßt, dieselbe zyklische Gruppe; jedes Gruppenelement hat dabei die Zahl* $n^2 - n + 1$ *der gleichnamigen Elemente des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *als Ordnung.*

Beweis. Aus dem Beweisgang des Satzes 5 erkennt man unmittelbar, daß

$$\boldsymbol{T}_2 = (\boldsymbol{T}_1)^2,\ \boldsymbol{T}_3 = (\boldsymbol{T}_1)^3,\ \boldsymbol{T}_4 = (\boldsymbol{T}_1)^4, \ldots, \boldsymbol{T}_{n^2-n} = (\boldsymbol{T}_1)^{n^2-n} \text{ und } \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})} = (\boldsymbol{T}_1)^{n^2-n+1},$$

also $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}$ gleich dem Einheitselement der durch $\boldsymbol{T}_1$ erzeugten zyklischen Gruppe ist. Außerdem ist natürlich

$$\boldsymbol{T}_{n^2-n} = (\boldsymbol{T}_1)^{-1}, \ldots \quad (\textit{inverses Element}).$$

Daß dabei stets *dieselbe* zyklische Gruppe erzeugt wird, ist aus dem Bildungsgesetz der $\boldsymbol{T}_\nu$ fast selbstverständlich und folgt aus der (schon Euler (1761) bekannten) Periodizität der Reihe der Potenzen eines bestimmten der $\boldsymbol{T}_\nu$.

Auch hieraus erhellt: *In jedem Veblensystem* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ $[n = 3, 4, 5, \ldots]$ *gibt es die identische Inzidenzabbildung* $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}$, das Einheitselement der in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ möglichen zyklischen Gruppen.

---

[13]) s. etwa A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 3. Aufl. Berlin 1937, § 4, S. 16 ff.

§ 4. *Formale Klassifikation der reellen Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}$ *in* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *nach Zahl und Inzidenzkonstellation der Fixpunkte.*

12. Mit den allgemeinen Entwicklungen und Aussagen der §§ 2 und 3 können wir jetzt (An-)Zahl und *reelle* geometrische Inzidenzkonstellation der Eigenbilder der reellen endlichen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$ in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ $[n = 3, 4, 5, \ldots]$ als Einteilungsgründe für die in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ formal möglichen *reellen Haupttypen* von Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$ benützen und die $\boldsymbol{T}$ darnach folgendermaßen *rein formal* klassifizieren:

Charakteristik	Bezeichnung	Haupttyp
1. $\boldsymbol{T}$ besitzt genau 0 Fixpunkte	fixpunktfreie Inzidenzabbildung	$\boldsymbol{T}^{(I)}$
2. $\boldsymbol{T}$ besitzt genau 1 Fixpunkt	einfixpunktige Inzidenzabbildung	$\boldsymbol{T}^{(II)}$
3. $\boldsymbol{T}$ besitzt mindestens 2 verschiedene Fixpunkte: a) Ihre (Fix-)Gerade ist nicht identisch auf sich bezogen, d. h. $\boldsymbol{T}$ besitzt auch nur höchstens, also *genau* zwei verschiedene Fixpunkte.	zweifixpunktige Inzidenzabbildung	$\boldsymbol{T}^{(III)}$
b) Ihre (Fix-)Gerade ist identisch auf sich bezogen, d. h. $\boldsymbol{T}$ besitzt mindestens $n - 2$ weitere, verschiedene Fixpunkte und (wegen **A. 1*, A. 2***) dann *genau* n kollineare, verschiedene Fixpunkte.	n-fixpunktige kollineare Inzidenzabbildung	$\boldsymbol{T}^{(IV)}$
4. $\boldsymbol{T}$ besitzt mindestens 3 verschiedene, nichtkollineare Fixpunkte: a) Von ihren drei (Fix-)Geraden ist keine identisch auf sich bezogen, d. h. $\boldsymbol{T}$ besitzt auch nur höchstens, also *genau* drei verschiedene, nichtkollineare Fixpunkte (*invariantes Dreieck*).	dreifixpunktige Inzidenzabbildung	$\boldsymbol{T}^{(V)}$
b) Von ihren drei (Fix-)Geraden ist eine identisch auf sich bezogen, d. h. $\boldsymbol{T}$ besitzt mindestens $n - 2$ weitere, verschiedene Fixpunkte und (wegen **A. 1* A. 2***) dann *genau* $3 + (n - 2) = n + 1$ verschiedene Fixpunkte, von denen n kollinear liegen.	$(n + 1)$-fixpunktige, kollineare Inzidenzabbildung	$\boldsymbol{T}^{(VI)}$
5. $\boldsymbol{T}$ besitzt genau 4 verschiedene Fixpunkte, von denen keine drei kollinear liegen.	identische Inzidenzabbildung, Identität	$\boldsymbol{T}^{(VII)}$

13. Bemerkenswert ist bei dieser Klassifikation, *daß die fixpunktfreien Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}^{(I)}$ *unter den ebenen Kollineationstypen kein Analogon haben.* Auch wird

sich im Verlaufe der Einzeluntersuchungen zeigen, daß gegenüber den ebenen Kollineationstypen und daher gegenüber der ebenen reellen und komplexen projektiven Geometrie und deren Axiomatik noch ein fundamentaler Unterschied in der Inzidenzanordnung von Fixpunkten und Fixgeraden der obigen Haupttypen besteht, demzufolge *die Gültigkeit der Aussage des eingangs erwähnten Baldusschen Satzes* 2 (von der in sich dualen Konstellation der Fixelemente einer ebenen Kollineation) *in den endlichen projektiven Geometrien der Veblensysteme für die reellen Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}$ *und deren Typen aufgehoben ist.*

Es kann nämlich (am leichtesten auf Grund gruppentheoretischer Überlegungen, s. Kap. II § 6 unter Nr. **21**) gezeigt werden, daß der Haupttyp $\boldsymbol{T}^{(II)}$ schon in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ in zwei verschiedene Untertypen $\boldsymbol{T}^{(II)_1}$ und $\boldsymbol{T}^{(II)_2}$ zerfällt, von denen nur einer unter den ebenen Kollineationstypen ein Analogon hat. Wie wir in späteren Arbeiten zeigen, gilt dies auch in $\boldsymbol{S}(13/2/4)$, $\boldsymbol{S}(21/2/5)$, $\boldsymbol{S}(31/2/6)$ (soweit habe ich bis jetzt untersucht). Diese Tatsache ist für die Axiomatik der reellen und komplexen ebenen projektiven Geometrie von grundlegender Bedeutung und gibt ein Mittel, die endlichen projektiven Geometrien der Veblensysteme $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ gegenüber der gewöhnlichen projektiven Geometrie und ihrer Axiomatik zu *kennzeichnen*, wie ich später zeigen werde.

Darin scheint, von diesem Zusammenhang aus gesehen, der wesentliche Unterschied zwischen *endlicher* und gewöhnlicher (reeller und komplexer) projektiver Geometrie zu liegen, neben dem anderen Umstand, daß es in ebenen endlichen projektiven Geometrien *Nichtdesarguessche* und *Nicht-Pappus-Pascalsche Geometrien* gibt [14]).

Kap. II. Die vollständige Inzidenzabbildungsstruktur des Fanoschen Ausschlußaxioms $\boldsymbol{S}(7/2/3)$.

14. In diesem Kapitel untersuchen wir — gleichsam als Anwendung der vorstehenden allgemeinen Theorie — die endliche projektive Geometrie des in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ für $n = 3$ eintretenden Veblensystems $\boldsymbol{S}(7/2/3)$. Wir stellen uns dabei die Aufgabe, *sämtliche* in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ bei festgehaltenem endlichen reellen Möbiusschen Ausgangsnetz $\{i, j, k, l\}$ *überhaupt möglichen* reellen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$ aufzufinden, allgemeine Aussagen über ihre Zahl zu machen, ihre Einteilung in Typen der im § 4 unterschiedenen Art vorzunehmen und deren genaue Zahlen festzustellen; endlich wollen wir dann ihren Zusammenhang mit der Gruppentheorie, soweit er hier in Frage kommt, klarstellen.

Da das Veblensystem $\boldsymbol{S}(7/2/3)$, wie ich gezeigt habe (s. a. a. O. [2]), S. 582 und Anm. [15])) direkt zum axiomatischen Ausschluß und zum Beweis der Unabhängigkeit des Fanoschen Axioms $\boldsymbol{F}_1$ (das besagt, daß die Nebenecken eines vollständigen Vierecks stets „krumm“ liegen) von den ebenen Verknüpfungsaxiomen, die in ihm erfüllt sind, herangezogen wird, so erreichen wir mit der vollständigen Untersuchung von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ auf reelle Inzidenzabbildungen und deren Typen eine vollständige Beherrschung der Funktion, die $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ als *Ausschlußaxiom* im axiomatischen Aufbau der (reellen und komplexen) ebenen projektiven Geometrie zukommt. Darüber hinaus wird der endliche ebene Bereich von projektivem Zusammenhang, den $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ aufspannt, in seiner Inzidenzstruktur vollständig erfaßt.

---

[14]) s. Veblen und Bussey, a. a. O. [3]), S. 247, und M. Steck, Zur Axiomatik der reellen ebenen projektiven Geometrie I: Die Unabhängigkeit des Vertauschungsaxioms V_2 von den Verknüpfungsaxiomen, Sitz. Ber. d. bayer. Akad. d. Wiss. (math.-nat. Abt.) 1937, 1—17.

[15]) M. Steck, Eine endliche minimale Pappus-Pascalsche Geometrie, Deutsche Math. **2** (1937), 242—251, insb. den Nachtrag § 6.

Als die $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ definierende und repräsentierende Inzidenztafel $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ halten wir die folgende (bereits früher angegebene, s. Anm. [2]), S. 582) der Abb. 1 fest:

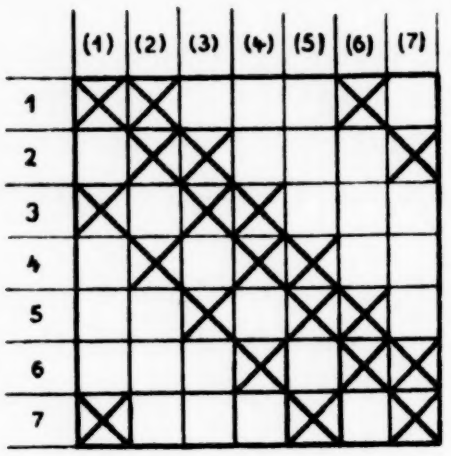

Abb. 1.

§ 5. *Der fixpunktfreie Inzidenzabbildungstyp* $\boldsymbol{T}^{(1)}$ *in* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$.

15. Wir halten generell (auch für die folgenden Paragraphen dieses Kapitels) als Ausgangsviereck $\{i, j, k, l\}$ der endlichen reellen Möbiusschen Netzkonstruktion in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ das Viereck der Punkte

$$\{1, 2, 3, 6\}$$

fest. Von ihnen liegen keine drei kollinear, wie die aus den Kolonnen (1), (2), (3), (4) der Tafel zu erkennende Krummlage der Punkttripel $\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 6\}, \{3, 6, 1\}, \{6, 1, 2\}$ zeigt. Als (kollineare) Nebenecken dieses Vierecks ergeben sich die Punkte 4, 5, 7, wie die Schnittbildungen

$$\begin{aligned}(1, 2) \times (3, 6) &= 4, \{(2) \text{ und } (4)\}\\ (1, 6) \times (2, 3) &= 5, \{(6) \;\;,, \;\; (3)\}\\ (1, 3) \times (2, 6) &= 7, \{(1) \;\;,, \;\; (7)\}\end{aligned}$$

beweisen. Verbindet man diese Punkte dann noch durch die *finite* Gerade $(4, 5, 7) = (5)$ des Systems $\boldsymbol{S}(7/2/3)$, so ist damit das Ausgangsnetz bereits vollständig gewonnen und in der Abb. 2 in einem Gestaltbild realisiert.

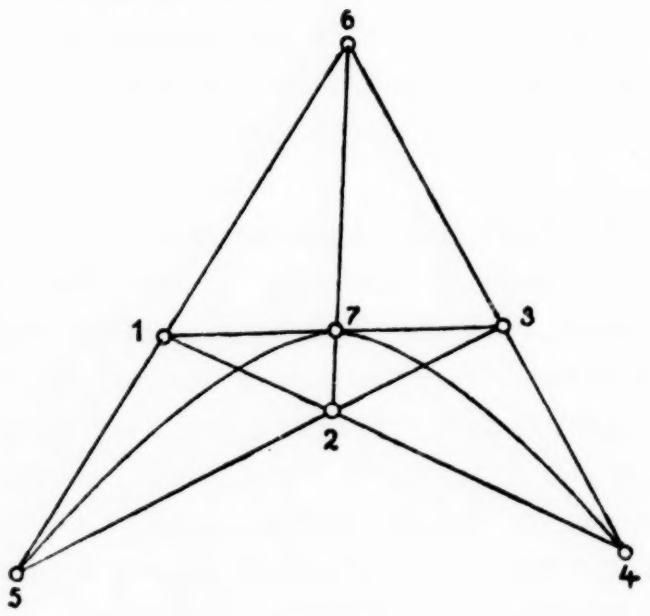

Abb. 2.

16. Die fixpunktfreie kollineare Beziehung der Ebene des Systems $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ auf sich werde dann mit Hilfe eines endlichen reellen Möbiusschen Bildnetzes $\{i', j', k', l'\}$ vorgenommen, in dem den Punkten 1, 2, 3, 6 der Reihe nach die Punkte i', j', k', l' als Bildpunkte aus $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ zugewiesen werden. Dabei sind folgende weitere Forderungen zu erfüllen:

1) $i' \neq 1,\ j' \neq 2,\ k' \neq 3,\ l' \neq 6$;

2) $(i', j') \times (k', l') \neq 4,\ (i', l') \times (j', k') \neq 5,\ (i', k') \times (j', l') \neq 7$;

3) $\{i', j', k'\}, \{j', k', l'\}, \{k', l', i'\}, \{l', i', j'\}$ sämtlich nicht kollinear.

Dann behaupten wir den folgenden *allgemeinen Existenzsatz*:

Satz. 8. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ *gibt es genau* 48 *untereinander und von der Identität verschiedene fixpunktfreie Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{I})}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 48)$.

Beweis. Aus den obigen drei Forderungen 1)—3) folgt leicht, daß als Bildvierecke $\{i', j', k', l'\}$ zu $\{1, 2, 3, 6\}$ genau die folgenden 48 Vierecke in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ in Frage kommen. Es sind dies, wie sich durch systematisches Erfüllen von 1)—3) in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ unmittelbar ergibt, die folgenden:

1. {2, 3, 4, 7}	9. {3, 1, 4, 5}	17. {4, 3, 1, 5}	25. {5, 1, 2, 7}	33. {6, 1, 4, 7}	41. {7, 1, 2, 5}
2. {2, 3, 7, 4}	10. {3, 1, 5, 4}	18. {4, 3, 7, 2}	26. {5, 1, 7, 2}	34. {6, 1, 7, 4}	42. {7, 1, 5, 2}
3. {2, 5, 1, 7}	11. {3, 4, 2, 7}	19. {4, 5, 1, 3}	27. {5, 3, 1, 4}	35. {6, 4, 1, 7}	43. {7, 3, 4, 2}
4. {2, 5, 7, 1}	12. {3, 4, 5, 1}	20. {4, 5, 6, 2}	28. {5, 3, 6, 7}	36. {6, 4, 5, 2}	44. {7, 3, 6, 5}
5. {2, 6, 4, 5}	13. {3, 5, 4, 1}	21. {4, 6, 2, 5}	29. {5, 4, 1, 3}	37. {6, 5, 4, 2}	45. {7, 4, 2, 3}
6. {2, 6, 5, 4}	14. {3, 5, 6, 7}	22. {4, 6, 7, 1}	30. {5, 4, 6, 2}	38. {6, 5, 7, 3}	46. {7, 4, 6, 1}
7. {2, 7, 1, 5}	15. {3, 7, 2, 4}	23. {4, 7, 2, 3}	31. {5, 6, 2, 4}	39. {6, 7, 1, 4}	47. {7, 6, 4, 1}
8. {2, 7, 5, 1}	16. {3, 7, 6, 5}	24. {4, 7, 6, 1}	32. {5, 6, 7, 3}	40. {6, 7, 5, 3}	48. {7, 6, 5, 3}.

Die entsprechenden (mit gleichem Index wie diese Nummern versehenen) hierdurch erzeugten fixpunktfreien Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{I})}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 48)$ sind die folgenden, wobei es bequem ist, die Transpositionen der Punkte in der folgenden, auch gruppentheoretisch üblichen Form zu schreiben:

$$\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 1$$
$$\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 3 \to 7 \to 6 \to 4 \to 5 \to 1$$
$$\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 6 \to 7 \to 4 \to 3 \to 1$$
$$\boldsymbol{T}_4^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 5 \to 4 \to 3 \to 7 \to 6 \to 1$$
$$\boldsymbol{T}_5^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 6 \to 5 \to 3 \to 4 \to 7 \to 1$$
$$\boldsymbol{T}_6^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 6 \to 4 \to 7 \to 3 \to 5 \to 1$$
$$\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 7 \to 4 \to 6 \to 5 \to 3 \to 1$$
$$\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 7 \to 3 \to 5 \to 4 \to 6 \to 1.$$

Es zeigt sich nun, wie schon im § 3 teilweise nachgewiesen wurde, daß man alle übrigen $\boldsymbol{T}_\mu^{(\mathrm{I})}$ $(\mu = 9, 10, 11, \ldots, 48)$ durch Betrachtung der durch je eine dieser acht $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{I})}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 8)$ erzeugten *zyklischen Gruppe der Elementordnung* 7 erhält. Dies werde jetzt explizit gezeigt.

I) $\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe:

$$\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})} = 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 1$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^2 = 1 \to 3 \to 5 \to 7 \to 2 \to 4 \to 6 \to 1 = \boldsymbol{T}_{12}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^3 = 1 \to 4 \to 7 \to 3 \to 6 \to 2 \to 5 \to 1 = \boldsymbol{T}_{20}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^4 = 1 \to 5 \to 2 \to 6 \to 3 \to 7 \to 4 \to 1 = \boldsymbol{T}_{32}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^5 = 1 \to 6 \to 4 \to 2 \to 7 \to 5 \to 3 \to 1 = \boldsymbol{T}_{39}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^6 = 1 \to 7 \to 6 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1 = \boldsymbol{T}_{41}^{(\mathrm{I})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})})^7 = 1 \leftrightarrow 1,\ 2 \leftrightarrow 2,\ 3 \leftrightarrow 3, \ldots, 7 \leftrightarrow 7 = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.$$

II) $\boldsymbol{T}_2^{(I)}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_2^{(I)} &= 1 \to 2 \to 3 \to 7 \to 6 \to 4 \to 5 \to 1 \\
(\boldsymbol{T}_2^{(I)})^2 &= 1 \to 3 \to 6 \to 5 \to 2 \to 7 \to 4 \to 1 = \boldsymbol{T}_{16}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_2^{(I)})^3 &= 1 \to 7 \to 5 \to 3 \to 4 \to 2 \to 6 \to 1 = \boldsymbol{T}_{47}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_2^{(I)})^4 &= 1 \to 6 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5 \to 7 \to 1 = \boldsymbol{T}_{36}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_2^{(I)})^5 &= 1 \to 4 \to 7 \to 2 \to 5 \to 6 \to 3 \to 1 = \boldsymbol{T}_{19}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_2^{(I)})^6 &= 1 \to 5 \to 4 \to 6 \to 7 \to 3 \to 2 \to 1 = \boldsymbol{T}_{25}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_2^{(I)})^7 &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \boldsymbol{T}^{(VII)}.
\end{aligned}$$

III) $\boldsymbol{T}_3^{(I)}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_3^{(I)} &= 1 \to 2 \to 5 \to 6 \to 7 \to 4 \to 3 \to 1 \\
(\boldsymbol{T}_3^{(I)})^2 &= 1 \to 5 \to 7 \to 3 \to 2 \to 6 \to 4 \to 1 = \boldsymbol{T}_{31}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_3^{(I)})^3 &= 1 \to 6 \to 3 \to 5 \to 4 \to 2 \to 7 \to 1 = \boldsymbol{T}_{40}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_3^{(I)})^4 &= 1 \to 7 \to 2 \to 4 \to 5 \to 3 \to 6 \to 1 = \boldsymbol{T}_{46}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_3^{(I)})^5 &= 1 \to 4 \to 6 \to 2 \to 3 \to 7 \to 5 \to 1 = \boldsymbol{T}_{18}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_3^{(I)})^6 &= 1 \to 3 \to 4 \to 7 \to 6 \to 5 \to 2 \to 1 = \boldsymbol{T}_{9}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_3^{(I)})^7 &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \boldsymbol{T}^{(VII)}.
\end{aligned}$$

IV) $\boldsymbol{T}_4^{(I)}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_4^{(I)} &= 1 \to 2 \to 5 \to 4 \to 3 \to 7 \to 6 \to 1 \\
(\boldsymbol{T}_4^{(I)})^2 &= 1 \to 5 \to 3 \to 6 \to 2 \to 4 \to 7 \to 1 = \boldsymbol{T}_{30}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_4^{(I)})^3 &= 1 \to 4 \to 6 \to 5 \to 7 \to 2 \to 3 \to 1 = \boldsymbol{T}_{17}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_4^{(I)})^4 &= 1 \to 3 \to 2 \to 7 \to 5 \to 6 \to 4 \to 1 = \boldsymbol{T}_{15}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_4^{(I)})^5 &= 1 \to 7 \to 4 \to 2 \to 6 \to 3 \to 5 \to 1 = \boldsymbol{T}_{48}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_4^{(I)})^6 &= 1 \to 6 \to 7 \to 3 \to 4 \to 5 \to 2 \to 1 = \boldsymbol{T}_{33}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_4^{(I)})^7 &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \boldsymbol{T}^{(VII)}.
\end{aligned}$$

V) $\boldsymbol{T}_5^{(I)}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_5^{(I)} &= 1 \to 2 \to 6 \to 5 \to 3 \to 4 \to 7 \to 1 \\
(\boldsymbol{T}_5^{(I)})^2 &= 1 \to 6 \to 3 \to 7 \to 2 \to 5 \to 4 \to 1 = \boldsymbol{T}_{38}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_5^{(I)})^3 &= 1 \to 5 \to 7 \to 6 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1 = \boldsymbol{T}_{27}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_5^{(I)})^4 &= 1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 6 \to 7 \to 5 \to 1 = \boldsymbol{T}_{11}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_5^{(I)})^5 &= 1 \to 4 \to 5 \to 2 \to 7 \to 3 \to 6 \to 1 = \boldsymbol{T}_{24}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_5^{(I)})^6 &= 1 \to 7 \to 4 \to 3 \to 5 \to 6 \to 2 \to 1 = \boldsymbol{T}_{42}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_5^{(I)})^7 &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \boldsymbol{T}^{(VII)}.
\end{aligned}$$

VI) $\boldsymbol{T}_6^{(I)}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_6^{(I)} &= 1 \to 2 \to 6 \to 4 \to 7 \to 3 \to 5 \to 1 \\
(\boldsymbol{T}_6^{(I)})^2 &= 1 \to 6 \to 7 \to 5 \to 2 \to 4 \to 3 \to 1 = \boldsymbol{T}_{35}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_6^{(I)})^3 &= 1 \to 4 \to 5 \to 6 \to 3 \to 2 \to 7 \to 1 = \boldsymbol{T}_{23}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_6^{(I)})^4 &= 1 \to 7 \to 2 \to 3 \to 6 \to 5 \to 4 \to 1 = \boldsymbol{T}_{44}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_6^{(I)})^5 &= 1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 5 \to 7 \to 6 \to 1 = \boldsymbol{T}_{13}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_6^{(I)})^6 &= 1 \to 5 \to 3 \to 7 \to 4 \to 6 \to 2 \to 1 = \boldsymbol{T}_{26}^{(I)} \\
(\boldsymbol{T}_6^{(I)})^7 &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \boldsymbol{T}^{(VII)}.
\end{aligned}$$

VII) $\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{I})}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{I})} &= 1 \to 2 \to 7 \to 4 \to 6 \to 5 \to 3 \to 1\\
(\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{I})})^2 &= 1 \to 7 \to 6 \to 3 \to 2 \to 4 \to 5 \to 1 = \boldsymbol{T}_{45}^{(\mathrm{I})}\\
(\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{I})})^3 &= 1 \to 4 \to 3 \to 7 \to 5 \to 2 \to 6 \to 1 = \boldsymbol{T}_{22}^{(\mathrm{I})}\\
(\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{I})})^4 &= 1 \to 6 \to 2 \to 5 \to 7 \to 3 \to 4 \to 1 = \boldsymbol{T}_{37}^{(\mathrm{I})}\\
(\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{I})})^5 &= 1 \to 5 \to 4 \to 2 \to 3 \to 6 \to 7 \to 1 = \boldsymbol{T}_{28}^{(\mathrm{I})}\\
(\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{I})})^6 &= 1 \to 3 \to 5 \to 6 \to 4 \to 7 \to 2 \to 1 = \boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{I})}\\
(\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{I})})^7 &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.
\end{aligned}$$

VIII) $\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{I})}$ endlich erzeugt die folgende zyklische Gruppe:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{I})} &= 1 \to 2 \to 7 \to 3 \to 5 \to 4 \to 6 \to 1\\
(\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{I})})^2 &= 1 \to 7 \to 5 \to 6 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1 = \boldsymbol{T}_{43}^{(\mathrm{I})}\\
(\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{I})})^3 &= 1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 4 \to 2 \to 5 \to 1 = \boldsymbol{T}_{14}^{(\mathrm{I})}\\
(\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{I})})^4 &= 1 \to 5 \to 2 \to 4 \to 7 \to 6 \to 3 \to 1 = \boldsymbol{T}_{29}^{(\mathrm{I})}\\
(\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{I})})^5 &= 1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 6 \to 5 \to 7 \to 1 = \boldsymbol{T}_{21}^{(\mathrm{I})}\\
(\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{I})})^6 &= 1 \to 6 \to 4 \to 5 \to 3 \to 7 \to 2 \to 1 = \boldsymbol{T}_{34}^{(\mathrm{I})}\\
(\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{I})})^7 &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.
\end{aligned}$$

17. Die Vervollständigung des Satzes 7 für den Fall des Veblensystems $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ stellt dann der folgende Satz dar:

Satz 9. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ *erzeugt jede der folgenden, je in einer Zeile stehenden fixpunktfreien Inzidenzabbildungen*

$$\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{I})}\ (\nu = 1, 2, \ldots, 48),$$

als Gruppenelement aufgefaßt, dieselbe zyklische Gruppe $\boldsymbol{G}_\mu^{(\mathrm{I})}(\mu = 1, 2, 3, \ldots, 8)$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G}_1^{(\mathrm{I})}&: \boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{12}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{20}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{32}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{39}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{41}^{(\mathrm{I})}\\
\boldsymbol{G}_2^{(\mathrm{I})}&: \boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{16}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{47}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{36}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{19}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{25}^{(\mathrm{I})}\\
\boldsymbol{G}_3^{(\mathrm{I})}&: \boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{31}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{40}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{46}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{18}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{9}^{(\mathrm{I})}\\
\boldsymbol{G}_4^{(\mathrm{I})}&: \boldsymbol{T}_4^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{30}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{17}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{15}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{48}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{33}^{(\mathrm{I})}\\
\boldsymbol{G}_5^{(\mathrm{I})}&: \boldsymbol{T}_5^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{38}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{27}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{11}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{24}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{42}^{(\mathrm{I})}\\
\boldsymbol{G}_6^{(\mathrm{I})}&: \boldsymbol{T}_6^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{35}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{23}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{44}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{13}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{26}^{(\mathrm{I})}\\
\boldsymbol{G}_7^{(\mathrm{I})}&: \boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{45}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{22}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{37}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{28}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{I})}\\
\boldsymbol{G}_8^{(\mathrm{I})}&: \boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{43}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{14}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{29}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{21}^{(\mathrm{I})}, \boldsymbol{T}_{34}^{(\mathrm{I})}.
\end{aligned}$$

Jedes Gruppenelement einer jeden Gruppe hat dabei die Zahl 7 *der gleichnamigen geometrischen Elemente des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ *als Ordnung.*

Beweis. Daß durch die $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{I})}$ zyklische Gruppen der Elementordnung 7 erzeugt werden, ist bereits im Beweisgang des Satzes 8 nachgewiesen worden.

Daß ferner die Elemente $\boldsymbol{T}_\mu^{(\mathrm{I})}$ $(\mu = 1, 12, 20, 32, 39, 41)$ der ersten Zeile von $\boldsymbol{G}_1^{(\mathrm{I})}$ *dieselbe* zyklische Gruppe $\boldsymbol{G}_1^{(\mathrm{I})}$ erzeugen, ist bereits durch Satz 7 ganz allgemein für jedes Veblensystem $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ $[n = 3, 4, 5, \ldots]$ erwiesen worden.

Es bleibt also etwa zu zeigen, daß $\boldsymbol{G}_5^{(\mathrm{I})}$ durch jedes der Elemente der fünften Zeile erzeugt werden kann. (Für die übrigen $\boldsymbol{G}_\mu^{(\mathrm{I})}$ wäre dieser Nachweis analog zu führen und sei daher dem Leser überlassen.)

Der $G_5^{(I)}$ gehört als Element $T_{11}^{(I)}$ an, das folgendermaßen definiert ist (s. unter Nr. 16):

$$T_{11}^{(I)} = 1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 6 \to 7 \to 5 \to 1 .$$

Wir bilden jetzt die Potenzen von $T_{11}^{(I)}$:

$$\begin{aligned}
(T_{11}^{(I)})^2 &= 1 \to 2 \to 6 \to 5 \to 3 \to 4 \to 7 \to 1 = T_5^{(I)} \\
(T_{11}^{(I)})^3 &= 1 \to 4 \to 5 \to 2 \to 7 \to 3 \to 6 \to 1 = T_{24}^{(I)} \\
(T_{11}^{(I)})^4 &= 1 \to 6 \to 3 \to 7 \to 2 \to 5 \to 4 \to 1 = T_{38}^{(I)} \\
(T_{11}^{(I)})^5 &= 1 \to 7 \to 4 \to 3 \to 5 \to 6 \to 2 \to 1 = T_{42}^{(I)} \\
(T_{11}^{(I)})^6 &= 1 \to 5 \to 7 \to 6 \to 4 \to 2 \to 3 \to 1 = T_{27}^{(I)} \\
(T_{11}^{(I)})^7 &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = T^{(VII)}.
\end{aligned}$$

Der entsprechende Nachweis für $T_{38}^{(I)}, T_{27}^{(I)}, T_{24}^{(I)}, T_{42}^{(I)}$ aus $G_5^{(I)}$ verläuft ganz analog, weshalb er hier unterdrückt werden kann.

Jede der Gruppen $G_\mu^{(I)}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, 8$) *reproduziert sich* also durch sukzessive Potenzbildung eines jeden ihrer Elemente $T_\lambda^{(I)}$.

18. Wir haben jetzt noch den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 10. *Jede fixpunktfreie Inzidenzabbildung* $T_\nu^{(I)}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, 48$) *von* $S(7/2/3)$ *ist auch fixgeradenfrei.*

Beweis. Da sich die Elemente jeder der zyklischen Gruppen $G_\mu^{(I)}$ ($\mu = 1, 2, 3, \ldots, 8$) gleichberechtigt verhalten, so genügt es, den behaupteten Satz für die Elemente irgendeiner der $G_\mu^{(I)}$ zu beweisen. Wir wählen dazu die $G_5^{(I)}$, die als Elemente (von der Identität abgesehen) die $T_\lambda^{(I)}$($\lambda = 5, 11, 24, 27, 38, 42$) besitzt. Dann verläuft der Nachweis in folgenden sechs Schritten:

1) Vermöge $T_5^{(I)}$ werden die Geraden von $S(7/2/3)$ folgendermaßen abgebildet (s. Tafel, Abb. 1):

$$\begin{aligned}
(1) = (1, 3, 7) &\to (2, 4, 1) = (2) \\
(2) = (1, 2, 4) &\to (2, 6, 7) = (7) \\
(3) = (2, 3, 5) &\to (6, 4, 3) = (4) \\
(4) = (3, 4, 6) &\to (4, 7, 5) = (5) \\
(5) = (4, 5, 7) &\to (7, 3, 1) = (1) \\
(6) = (1, 5, 6) &\to (2, 3, 5) = (3) \\
(7) = (2, 6, 7) &\to (6, 5, 1) = (6),
\end{aligned}$$

also:

$$(1) \to (2) \to (7) \to (6) \to (3) \to (4) \to (5) \to (1) .$$

2) Vermöge $T_{11}^{(I)}$ werden die Geraden von $S(7/2/3)$ so abgebildet:

$$\begin{aligned}
(1) = (1, 3, 7) &\to (3, 2, 5) = (3) \\
(2) = (1, 2, 4) &\to (3, 4, 6) = (4) \\
(3) = (2, 3, 5) &\to (4, 2, 1) = (2) \\
(4) = (3, 4, 6) &\to (2, 6, 7) = (7) \\
(5) = (4, 5, 7) &\to (6, 1, 5) = (6) \\
(6) = (1, 5, 6) &\to (3, 1, 7) = (1) \\
(7) = (2, 6, 7) &\to (4, 7, 5) = (5),
\end{aligned}$$

also:

$$(1) \to (3) \to (2) \to (4) \to (7) \to (5) \to (6) \to (1).$$

3) Vermöge $\boldsymbol{T}_{21}^{(I)}$ werden die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ wie folgt abgebildet:

$$(1) = (1, 3, 7) \to (4, 6, 3) = (4)$$
$$(2) = (1, 2, 4) \to (4, 7, 5) = (5)$$
$$(3) = (2, 3, 5) \to (7, 6, 2) = (7)$$
$$(4) = (3, 4, 6) \to (6, 5, 1) = (6)$$
$$(5) = (4, 5, 7) \to (5, 2, 3) = (3)$$
$$(6) = (1, 5, 6) \to (4, 2, 1) = (2)$$
$$(7) = (2, 6, 7) \to (7, 1, 3) = (1),$$

also:

$$(1) \to (4) \to (6) \to (2) \to (5) \to (3) \to (7) \to (1).$$

4) $\boldsymbol{T}_{27}^{(I)}$ bildet die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ folgendermaßen ab:

$$(1) = (1, 3, 7) \to (5, 1, 6) = (6)$$
$$(2) = (1, 2, 4) \to (5, 3, 2) = (3)$$
$$(3) = (2, 3, 5) \to (3, 1, 7) = (1)$$
$$(4) = (3, 4, 6) \to (1, 2, 4) = (2)$$
$$(5) = (4, 5, 7) \to (2, 7, 6) = (7)$$
$$(6) = (1, 5, 6) \to (5, 7, 4) = (5)$$
$$(7) = (2, 6, 7) \to (3, 4, 6) = (4),$$

also:

$$(1) \to (6) \to (5) \to (7) \to (4) \to (2) \to (3) \to (1).$$

5) $\boldsymbol{T}_{38}^{(I)}$ führt die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ wie folgt ineinander über:

$$(1) = (1, 3, 7) \to (6, 7, 2) = (7)$$
$$(2) = (1, 2, 4) \to (6, 5, 1) = (6)$$
$$(3) = (2, 3, 5) \to (5, 7, 4) = (5)$$
$$(4) = (3, 4, 6) \to (7, 1, 3) = (1)$$
$$(5) = (4, 5, 7) \to (1, 4, 2) = (2)$$
$$(6) = (1, 5, 6) \to (6, 4, 3) = (4)$$
$$(7) = (2, 6, 7) \to (5, 3, 2) = (3),$$

also:

$$(1) \to (7) \to (3) \to (5) \to (2) \to (6) \to (4) \to (1).$$

6) $\boldsymbol{T}_{42}^{(I)}$ endlich führt die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ so ineinander über:

$$(1) = (1, 3, 7) \to (7, 5, 4) = (5)$$
$$(2) = (1, 2, 4) \to (7, 1, 3) = (1)$$
$$(3) = (2, 3, 5) \to (1, 5, 6) = (6)$$
$$(4) = (3, 4, 6) \to (5, 3, 2) = (3)$$
$$(5) = (4, 5, 7) \to (3, 6, 4) = (4)$$
$$(6) = (1, 5, 6) \to (7, 6, 2) = (7)$$
$$(7) = (2, 6, 7) \to (1, 2, 4) = (2),$$

also:

$$(1) \to (5) \to (4) \to (3) \to (6) \to (7) \to (2) \to (1).$$

§ 6. *Der einfixpunktige Inzidenzabbildungstyp* $\boldsymbol{T}^{(II)}$ *in* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$.

19. Als einziger Fixpunkt kann etwa der Punkt 1 vorgeschrieben werden. Dann wird die einfixpunktige kollineare Beziehung der Ebene des Systems $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ auf sich

mit Hilfe eines endlichen Möbiusschen Bildnetzes $\{1, j', k', l'\}$ vorgenommen, in dem den Punkten 1, 2, 3, 6 des Ausgangsnetzes der Reihe nach die Punkte $1, j', k', l'$ als Bildpunkte aus $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ zugewiesen werden. Dabei sind überdies noch folgende Forderungen zu erfüllen:

1) $j' \neq 2,\ k' \neq 3,\ l' \neq 6$;

2) $(1, j') \times (k', l') \neq 4,\ (1, l') \times (j', k') \neq 5,\ (1, k') \times (j', l') \neq 7$;

3) $\{1, j', k'\},\ \{j', k', l'\},\ \{k', l', 1\},\ \{l', 1, j'\}$ sämtlich nicht kollinear.

Dann behaupten wir den folgenden allgemeinen Existenzsatz:

Satz 11. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ *gibt es bei vorgeschriebenem Fixpunkt genau* 14 *untereinander und von der Identität verschiedene einfixpunktige Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{II})}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 14)$.

Beweis. Aus den obigen Forderungen 1)—3) folgert man wieder, durch systematisches Erfüllen derselben, leicht, daß als Bildvierecke $\{1, j', k', l'\}$ zu $\{1, 2, 3, 6\}$ *genau* die folgenden 14 Vierecke in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ eintreten können:

1. $\{1, 3, 4, 5\}$	8. $\{1, 5, 7, 2\}$
2. $\{1, 3, 5, 4\}$	9. $\{1, 6, 2, 3\}$
3. $\{1, 3, 6, 2\}$	10. $\{1, 6, 4, 7\}$
4. $\{1, 4, 5, 3\}$	11. $\{1, 6, 7, 4\}$
5. $\{1, 4, 6, 7\}$	12. $\{1, 7, 2, 5\}$
6. $\{1, 5, 2, 7\}$	13. $\{1, 7, 5, 2\}$
7. $\{1, 5, 4, 3\}$	14. $\{1, 7, 6, 4\}$.

Die entsprechenden (mit gleichem Index wie diese Nummern versehenen), hierdurch erzeugten einfixpunktigen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{II})}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 14)$ sind die folgenden:

$$\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{II})} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2,\ 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5$$
$$\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{II})} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2,\ 4 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6 \longrightarrow 4$$
$$\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{II})} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 2,\ 4 \longrightarrow 7 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4$$
$$\boldsymbol{T}_4^{(\mathrm{II})} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3$$
$$\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{II})} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3$$
$$\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{II})} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3$$
$$\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{II})} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3.$$

Es zeigt sich nun auch hier wieder, daß man alle übrigen

$$\boldsymbol{T}_\mu^{(\mathrm{II})} \quad (\mu = 5, 6, 9, 11, 12, 13, 14)$$

durch Betrachtung der durch je eine dieser sieben $\boldsymbol{T}_\lambda^{(\mathrm{II})}$ $(\lambda = 1, 2, 3, 4, 7, 8, 10)$ erzeugten zyklischen Gruppen der Elementordnung 3 bzw. 4 erhält. Dies werde jetzt explizit gezeigt.

I) $\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{II})}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe der Elementordnung 4:

$$\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{II})} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2,\ 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{II})})^2 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3,\ 5 \longleftrightarrow 5,\ 6 \longleftrightarrow 6$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{II})})^3 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 7 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2,\ 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5 \qquad = \boldsymbol{T}_{12}^{(\mathrm{II})}$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{II})})^4 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longleftrightarrow 3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ 7 \longleftrightarrow 7 = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.$$

II) $\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{II})}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe der Elementordnung 3:

$$\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{II})} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2,\ 4 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6 \longrightarrow 4$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{II})})^2 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2,\ 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 4 = \boldsymbol{T}_6^{(\mathrm{II})}$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{II})})^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.$$

III) $\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{II})}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe der Elementordnung 3:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{II})} &= 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 2,\ 4 \longrightarrow 7 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4\\
(\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{II})})^2 &= 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2,\ 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 4 = \boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{II})}\\
(\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{II})})^3 &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.
\end{aligned}$$

IV) $\boldsymbol{T}_4^{(\mathrm{II})}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe der Elementordnung 4:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_4^{(\mathrm{II})} &= 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3\\
(\boldsymbol{T}_4^{(\mathrm{II})})^2 &= 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3,\ 4 \longleftrightarrow 4,\ 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5\\
(\boldsymbol{T}_4^{(\mathrm{II})})^3 &= 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3 = \boldsymbol{T}_5^{(\mathrm{II})}\\
(\boldsymbol{T}_4^{(\mathrm{II})})^4 &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.
\end{aligned}$$

V) $\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{II})}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe der Elementordnung 3:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{II})} &= 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3\\
(\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{II})})^2 &= 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 7 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 = \boldsymbol{T}_{14}^{(\mathrm{II})}\\
(\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{II})})^3 &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.
\end{aligned}$$

VI) $\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{II})}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe der Elementordnung 4:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{II})} &= 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3\\
(\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{II})})^2 &= 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2,\ 3 \longleftrightarrow 3,\ 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5,\ 7 \longleftrightarrow 7\\
(\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{II})})^3 &= 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3 = \boldsymbol{T}_{11}^{(\mathrm{II})}\\
(\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{II})})^4 &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.
\end{aligned}$$

VII) $\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{II})}$ endlich erzeugt die zyklische Gruppe der Elementordnung 3:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{II})} &= 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3\\
(\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{II})})^2 &= 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 = \boldsymbol{T}_{13}^{(\mathrm{II})}\\
(\boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{II})})^3 &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.
\end{aligned}$$

20. Dem Satz 9 des vorigen Paragraphen entspricht hier der folgende:

Satz 12. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ *erzeugt jede der folgenden, je in einer Zeile stehenden einfixpunktigen Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{II})}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 14)$, *als Gruppenelement aufgefaßt, dieselbe zyklische Gruppe* $\boldsymbol{G}_\mu^{(\mathrm{II})}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, 7)$:

$$\begin{array}{ll}
\boldsymbol{G}_1^{(\mathrm{II})}: & \boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{II})},\ \boldsymbol{T}_{12}^{(\mathrm{II})}\\
\boldsymbol{G}_2^{(\mathrm{II})}: & \boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{II})},\ \boldsymbol{T}_6^{(\mathrm{II})}\\
\boldsymbol{G}_3^{(\mathrm{II})}: & \boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{II})},\ \boldsymbol{T}_9^{(\mathrm{II})}\\
\boldsymbol{G}_4^{(\mathrm{II})}: & \boldsymbol{T}_4^{(\mathrm{II})},\ \boldsymbol{T}_5^{(\mathrm{II})}\\
\boldsymbol{G}_5^{(\mathrm{II})}: & \boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{II})},\ \boldsymbol{T}_{14}^{(\mathrm{II})}\\
\boldsymbol{G}_6^{(\mathrm{II})}: & \boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{II})},\ \boldsymbol{T}_{11}^{(\mathrm{II})}\\
\boldsymbol{G}_7^{(\mathrm{II})}: & \boldsymbol{T}_{10}^{(\mathrm{II})},\ \boldsymbol{T}_{13}^{(\mathrm{II})};
\end{array}$$

jedes Gruppenelement einer jeden der Gruppen $\boldsymbol{G}_1^{(\mathrm{II})}, \boldsymbol{G}_4^{(\mathrm{II})}, \boldsymbol{G}_6^{(\mathrm{II})}$ *hat die Ordnung* 4; *jedes Gruppenelement einer jeden der Gruppen* $\boldsymbol{G}_2^{(\mathrm{II})}, \boldsymbol{G}_3^{(\mathrm{II})}, \boldsymbol{G}_5^{(\mathrm{II})}, \boldsymbol{G}_7^{(\mathrm{II})}$ *hat die Ordnung* 3.

Beweis. Daß die $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{II})}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 14)$ zyklische Gruppen erzeugen, ist im Beweisgang des vorigen Satzes erwiesen worden. Da, wie man sich leicht überzeugt, die Gruppen $\boldsymbol{G}_1^{(\mathrm{II})}, \boldsymbol{G}_4^{(\mathrm{II})}, \boldsymbol{G}_6^{(\mathrm{II})}$ einerseits, die Gruppen $\boldsymbol{G}_2^{(\mathrm{II})}, \boldsymbol{G}_3^{(\mathrm{II})}, \boldsymbol{G}_5^{(\mathrm{II})}, \boldsymbol{G}_7^{(\mathrm{II})}$ andererseits unter sich gleichberechtigt sind, so bleibt nur zu zeigen:

a) Daß etwa $G_6^{(II)}$ durch jedes der Elemente der sechsten Zeile erzeugt werden kann;

b) daß andererseits etwa $G_7^{(II)}$ durch jedes der Elemente der siebten Zeile erzeugt wird.

Zu a): Der $G_6^{(II)}$ gehört als Element $T_{11}^{(II)}$ an, das folgendermaßen definiert ist:

$$T_{11}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3.$$

Wir bilden jetzt die Potenzen von $T_{11}^{(II)}$:

$$(T_{11}^{(II)})^2 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2,\ 3 \longleftrightarrow 3,\ 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5,\ 7 \longleftrightarrow 7 = (T_8^{(II)})^2$$
$$(T_{11}^{(II)})^3 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3 = T_8^{(II)}$$
$$(T_{11}^{(II)})^4 = \cdots\cdots\cdots = T^{(VII)}.$$

Zu b): Der $G_7^{(II)}$ gehört $T_{13}^{(II)}$ als Element an und war so definiert:

$$T_{13}^{(II)} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3.$$

Durch Potenzbildung kommt:

$$(T_{13}^{(II)})^2 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3 = T_{10}^{(II)}$$
$$(T_{13}^{(II)})^3 = \cdots\cdots\cdots = T^{(VII)}.$$

21. Entsprechend Satz 10 beweisen wir jetzt den folgenden, *für die Axiomatik der ebenen* (reellen und komplexen) *projektiven Geometrie grundlegenden Satz*, der wieder deutlich den Unterschied zwischen endlicher und gewöhnlicher projektiver Geometrie erkennen läßt:

Satz 13. *Jede einfixpunktige Inzidenzabbildung* $T_\nu^{(II)}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 14)$ *der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $S(7/2/3)$ *besitzt auch genau eine Fixgerade; nach ihrem gruppentheoretischen Charakter aber zerfallen die* $T_\nu^{(II)}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 14)$ *von* $S(7/2/3)$ *in genau zwei verschiedene Untertypen* $T_{\nu_1}^{(II)_1}$ *und* $T_{\nu_2}^{(II)_2}$, *je nachdem die Fixgerade den Fixpunkt enthält oder nicht enthält. Es gilt dabei:*

$T_1^{(II)} = T_1^{(II)_1}$	$T_2^{(II)} = T_2^{(II)_2}$
$T_4^{(II)} = T_4^{(II)_1}$	$T_3^{(II)} = T_3^{(II)_2}$
$T_5^{(II)} = T_5^{(II)_1}$	$T_6^{(II)} = T_6^{(II)_2}$
$T_8^{(II)} = T_8^{(II)_1}$	$T_7^{(II)} = T_7^{(II)_2}$
$T_{11}^{(II)} = T_{11}^{(II)_1}$	$T_9^{(II)} = T_9^{(II)_2}$
$T_{12}^{(II)} = T_{12}^{(II)_1}$	$T_{10}^{(II)} = T_{10}^{(II)_2}$
	$T_{13}^{(II)} = T_{13}^{(II)_2}$
	$T_{14}^{(II)} = T_{14}^{(II)_2}$.

Beweis. Der Beweis möge für alle $T_\nu^{(II)}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 14)$ explizit durchgeführt werden.

1) $T_1^{(II)}$ führt die Geraden von $S(7/2/3)$ folgendermaßen ineinander über:

$$(1) = (1, 3, 7) \longrightarrow (1, 4, 2) = (2)$$
$$(2) = (1, 2, 4) \longrightarrow (1, 3, 7) = (1)$$
$$(3) = (2, 3, 5) \longrightarrow (3, 4, 6) = (4)$$
$$(4) = (3, 4, 6) \longrightarrow (4, 7, 5) = (5)$$
$$(5) = (4, 5, 7) \longrightarrow (7, 6, 2) = (7)$$
$$(6) = (1, 5, 6) \longleftrightarrow (1, 6, 5) = (6)$$
$$(7) = (2, 6, 7) \longrightarrow (3, 5, 2) = (3),$$

also:

$$(1) \longrightarrow (2) \longrightarrow (1),\ (3) \longrightarrow (4) \longrightarrow (5) \longrightarrow (7) \longrightarrow (3),\ (6) \longleftrightarrow (6).$$

Da die Fixgerade (6) den Fixpunkt 1 enthält, gilt:

$$\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{II})_1}.$$

2) $\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{II})}$ führt die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ folgendermaßen ineinander über:

$$(1) = (1, 3, 7) \longrightarrow (1, 5, 6) = (6)$$
$$(2) = (1, 2, 4) \longrightarrow (1, 3, 7) = (1)$$
$$(3) = (2, 3, 5) \longleftrightarrow (3, 5, 2) = (3)$$
$$(4) = (3, 4, 6) \longrightarrow (5, 7, 4) = (5)$$
$$(5) = (4, 5, 7) \longrightarrow (7, 2, 6) = (7)$$
$$(6) = (1, 5, 6) \longrightarrow (1, 2, 4) = (2)$$
$$(7) = (2, 6, 7) \longrightarrow (3, 4, 6) = (4),$$

also:

$$(1) \longrightarrow (6) \longrightarrow (2) \longrightarrow (1),\ (3) \longleftrightarrow (3),\ (4) \longrightarrow (5) \longrightarrow (7) \longrightarrow (4).$$

Da die Fixgerade (3) den Fixpunkt 1 nicht enthält, gilt:

$$\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{II})_2}.$$

3) $\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{II})}$ führt die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ wie folgt ineinander über:

$$(1) = (1, 3, 7) \longrightarrow (1, 6, 5) = (6)$$
$$(2) = (1, 2, 4) \longrightarrow (1, 3, 7) = (1)$$
$$(3) = (2, 3, 5) \longrightarrow (3, 6, 4) = (4)$$
$$(4) = (3, 4, 6) \longrightarrow (6, 7, 2) = (7)$$
$$(5) = (4, 5, 7) \longleftrightarrow (7, 4, 5) = (5)$$
$$(6) = (1, 5, 6) \longrightarrow (1, 4, 2) = (2)$$
$$(7) = (2, 6, 7) \longrightarrow (3, 2, 5) = (3),$$

also:

$$(1) \longrightarrow (6) \longrightarrow (2) \longrightarrow (1),\ (3) \longrightarrow (4) \longrightarrow (7) \longrightarrow (3),\ (5) \longleftrightarrow (5).$$

Da die Fixgerade (5) den Fixpunkt 1 nicht enthält, gilt:

$$\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{II})_3}.$$

4) Vermöge $\boldsymbol{T}_4^{(\mathrm{II})}$ gehen die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ so ineinander über:

$$(1) = (1, 3, 7) \longrightarrow (1, 5, 6) = (6)$$
$$(2) = (1, 2, 4) \longleftrightarrow (1, 4, 2) = (2)$$
$$(3) = (2, 3, 5) \longrightarrow (4, 5, 7) = (5)$$
$$(4) = (3, 4, 6) \longrightarrow (5, 2, 3) = (3)$$
$$(5) = (4, 5, 7) \longrightarrow (2, 7, 6) = (7)$$
$$(6) = (1, 5, 6) \longrightarrow (1, 7, 3) = (1)$$
$$(7) = (2, 6, 7) \longrightarrow (4, 3, 6) = (4),$$

also:

$$(1) \longrightarrow (6) \longrightarrow (1),\ (2) \longleftrightarrow (2),\ (3) \longrightarrow (5) \longrightarrow (7) \longrightarrow (4) \longrightarrow (3).$$

Da die Fixgerade (2) den Fixpunkt 1 enthält, gilt:

$$\boldsymbol{T}_4^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{T}_4^{(\mathrm{II})_1}.$$

5) Durch Ausübung von $\boldsymbol{T}_5^{(\mathrm{II})}$ gehen die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ wie folgt ineinander über:

$$(1) = (1, 3, 7) \longrightarrow (1, 6, 5) = (6)$$
$$(2) = (1, 2, 4) \longleftrightarrow (1, 4, 2) = (2)$$
$$(3) = (2, 3, 5) \longrightarrow (4, 6, 3) = (4)$$
$$(4) = (3, 4, 6) \longrightarrow (6, 2, 7) = (7)$$
$$(5) = (4, 5, 7) \longrightarrow (2, 3, 5) = (3)$$
$$(6) = (1, 5, 6) \longrightarrow (1, 3, 7) = (1)$$
$$(7) = (2, 6, 7) \longrightarrow (4, 7, 5) = (5),$$

also:

$$(1) \longrightarrow (6) \longrightarrow (1),\ (2) \longleftrightarrow (2),\ (3) \longrightarrow (4) \longrightarrow (7) \longrightarrow (5) \longrightarrow (3).$$

Da die Fixgerade (2) den Fixpunkt 1 enthält, gilt:

$$\boldsymbol{T}_5^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{T}_5^{(\mathrm{II})_1}.$$

6) Vermöge $\boldsymbol{T}_6^{(\mathrm{II})}$ gehen die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ wie folgt ineinander über:

$$(1) = (1, 3, 7) \longrightarrow (1, 2, 4) = (2)$$
$$(2) = (1, 2, 4) \longrightarrow (1, 5, 6) = (6)$$
$$(3) = (2, 3, 5) \longleftrightarrow (5, 2, 3) = (3)$$
$$(4) = (3, 4, 6) \longrightarrow (2, 6, 7) = (7)$$
$$(5) = (4, 5, 7) \longrightarrow (6, 3, 4) = (4)$$
$$(6) = (1, 5, 6) \longrightarrow (1, 3, 7) = (1)$$
$$(7) = (2, 6, 7) \longrightarrow (5, 7, 4) = (5),$$

also:

$$(1) \longrightarrow (2) \longrightarrow (6) \longrightarrow (1),\ (3) \longleftrightarrow (3),\ (4) \longrightarrow (7) \longrightarrow (5) \longrightarrow (4).$$

Da die Fixgerade (3) den Fixpunkt 1 nicht enthält, gilt:

$$\boldsymbol{T}_6^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{T}_6^{(\mathrm{II})_2}.$$

7) Durch $\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{II})}$ werden die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ folgendermaßen abgebildet:

$$(1) = (1, 3, 7) \longrightarrow (1, 4, 2) = (2)$$
$$(2) = (1, 2, 4) \longrightarrow (1, 5, 6) = (6)$$
$$(3) = (2, 3, 5) \longrightarrow (5, 4, 7) = (5)$$
$$(4) = (3, 4, 6) \longleftrightarrow (4, 6, 3) = (4)$$
$$(5) = (4, 5, 7) \longrightarrow (6, 7, 2) = (7)$$
$$(6) = (1, 5, 6) \longrightarrow (1, 7, 3) = (1)$$
$$(7) = (2, 6, 7) \longrightarrow (5, 3, 2) = (3),$$

also:

$$(1) \longrightarrow (2) \longrightarrow (6) \longrightarrow (1),\ (3) \longrightarrow (5) \longrightarrow (7) \longrightarrow (3),\ (4) \longleftrightarrow (4).$$

Da die Fixgerade (4) den Fixpunkt 1 nicht enthält, gilt:

$$\boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{T}_7^{(\mathrm{II})_2}.$$

8) $\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{II})}$ führt die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ so ineinander über:

$$(1) = (1, 3, 7) \longleftrightarrow (1, 7, 3) = (1)$$
$$(2) = (1, 2, 4) \longrightarrow (1, 5, 6) = (6)$$
$$(3) = (2, 3, 5) \longrightarrow (5, 7, 4) = (5)$$
$$(4) = (3, 4, 6) \longrightarrow (7, 6, 2) = (7)$$
$$(5) = (4, 5, 7) \longrightarrow (6, 4, 3) = (4)$$
$$(6) = (1, 5, 6) \longrightarrow (1, 4, 2) = (2)$$
$$(7) = (2, 6, 7) \longrightarrow (5, 2, 3) = (3),$$

also:

$$(1) \longleftrightarrow (1),\ (2) \longrightarrow (6) \longrightarrow (2),\ (3) \longrightarrow (5) \longrightarrow (4) \longrightarrow (7) \longrightarrow (3).$$

Da die Fixgerade (1) den Fixpunkt 1 enthält, gilt:

$$\boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{T}_8^{(\mathrm{II})_1}.$$

9) Vermöge $\boldsymbol{T}_9^{(II)}$ gehen die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ wie folgt ineinander über:

$$\begin{gathered}(1) = (1, 3, 7) \longrightarrow (1, 2, 4) = (2)\\ (2) = (1, 2, 4) \longrightarrow (1, 6, 5) = (6)\\ (3) = (2, 3, 5) \longrightarrow (6, 2, 7) = (7)\\ (4) = (3, 4, 6) \longrightarrow (2, 5, 3) = (3)\\ (5) = (4, 5, 7) \longleftrightarrow (5, 7, 4) = (5)\\ (6) = (1, 5, 6) \longrightarrow (1, 7, 3) = (1)\\ (7) = (2, 6, 7) \longrightarrow (6, 3, 4) = (4),\end{gathered}$$

also:

$$(1) \longrightarrow (2) \longrightarrow (6) \longrightarrow (1),\ (3) \longrightarrow (7) \longrightarrow (4) \longrightarrow (3),\ (5) \longleftrightarrow (5).$$

Da die Fixgerade (5) den Fixpunkt 1 nicht enthält, gilt:

$$\boldsymbol{T}_9^{(II)} = \boldsymbol{T}_9^{(II)_2}.$$

10) Durch $\boldsymbol{T}_{10}^{(II)}$ gehen die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ so ineinander über:

$$\begin{gathered}(1) = (1, 3, 7) \longrightarrow (1, 4, 2) = (2)\\ (2) = (1, 2, 4) \longrightarrow (1, 6, 5) = (6)\\ (3) = (2, 3, 5) \longrightarrow (6, 4, 3) = (4)\\ (4) = (3, 4, 6) \longrightarrow (4, 5, 7) = (5)\\ (5) = (4, 5, 7) \longrightarrow (5, 3, 2) = (3)\\ (6) = (1, 5, 6) \longrightarrow (1, 3, 7) = (1)\\ (7) = (2, 6, 7) \longleftrightarrow (6, 7, 2) = (7),\end{gathered}$$

also:

$$(1) \longrightarrow (2) \longrightarrow (6) \longrightarrow (1),\ (3) \longrightarrow (4) \longrightarrow (5) \longrightarrow (3),\ (7) \longleftrightarrow (7).$$

Da die Fixgerade (7) den Fixpunkt 1 nicht enthält, gilt:

$$\boldsymbol{T}_{10}^{(II)} = T_{10}^{(II)_2}.$$

11) $\boldsymbol{T}_{11}^{(II)}$ führt die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ folgendermaßen ineinander über:

$$\begin{gathered}(1) = (1, 3, 7) \longleftrightarrow (1, 7, 3) = (1)\\ (2) = (1, 2, 4) \longrightarrow (1, 6, 5) = (6)\\ (3) = (2, 3, 5) \longrightarrow (6, 7, 2) = (7)\\ (4) = (3, 4, 6) \longrightarrow (7, 5, 4) = (5)\\ (5) = (4, 5, 7) \longrightarrow (5, 2, 3) = (3)\\ (6) = (1, 5, 6) \longrightarrow (1, 2, 4) = (2)\\ (7) = (2, 6, 7) \longrightarrow (6, 4, 3) = (4),\end{gathered}$$

also:

$$(1) \longleftrightarrow (1),\ (2) \longrightarrow (6) \longrightarrow (2),\ (3) \longrightarrow (7) \longrightarrow (4) \longrightarrow (5) \longrightarrow (3).$$

Da die Fixgerade (1) den Fixpunkt 1 enthält, gilt:

$$\boldsymbol{T}_{11}^{(II)} = \boldsymbol{T}_{11}^{(II)_3}.$$

12) $\boldsymbol{T}_{12}^{(II)}$ bildet die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ folgendermaßen ab:

$$\begin{gathered}(1) = (1, 3, 7) \longrightarrow (1, 2, 4) = (2)\\ (2) = (1, 2, 4) \longrightarrow (1, 7, 3) = (1)\\ (3) = (2, 3, 5) \longrightarrow (7, 2, 6) = (7)\\ (4) = (3, 4, 6) \longrightarrow (2, 3, 5) = (3)\\ (5) = (4, 5, 7) \longrightarrow (3, 6, 4) = (4)\\ (6) = (1, 5, 6) \longleftrightarrow (1, 6, 5) = (6)\\ (7) = (2, 6, 7) \longrightarrow (7, 5, 4) = (5),\end{gathered}$$

also:

$$(1) \longrightarrow (2) \longrightarrow (1),\ (3) \longrightarrow (7) \longrightarrow (5) \longrightarrow (4) \longrightarrow (3),\ (6) \longleftrightarrow (6).$$

Da die Fixgerade (6) den Fixpunkt 1 enthält, gilt:

$$\boldsymbol{T}_{12}^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{T}_{12}^{(\mathrm{II})_1}.$$

13) Vermöge $\boldsymbol{T}_{13}^{(\mathrm{II})}$ gehen die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ folgendermaßen ineinander über:

$$\begin{aligned}
(1) = (1,3,7) &\longrightarrow (1,5,6) = (6)\\
(2) = (1,2,4) &\longrightarrow (1,7,3) = (1)\\
(3) = (2,3,5) &\longrightarrow (7,5,4) = (5)\\
(4) = (3,4,6) &\longrightarrow (5,3,2) = (3)\\
(5) = (4,5,7) &\longrightarrow (3,4,6) = (4)\\
(6) = (1,5,6) &\longrightarrow (1,4,2) = (2)\\
(7) = (2,6,7) &\longleftrightarrow (7,2,6) = (7),
\end{aligned}$$

also:

$$(1) \longrightarrow (6) \longrightarrow (2) \longrightarrow (1),\ (3) \longrightarrow (5) \longrightarrow (4) \longrightarrow (3),\ (7) \longleftrightarrow (7).$$

Da die Fixgerade (7) den Fixpunkt 1 nicht enthält, gilt:

$$\boldsymbol{T}_{13}^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{T}_{13}^{(\mathrm{II})_2}.$$

14) $\boldsymbol{T}_{14}^{(\mathrm{II})}$ endlich führt die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ so ineinander über:

$$\begin{aligned}
(1) = (1,3,7) &\longrightarrow (1,6,5) = (6)\\
(2) = (1,2,4) &\longrightarrow (1,7,3) = (1)\\
(3) = (2,3,5) &\longrightarrow (7,6,2) = (7)\\
(4) = (3,4,6) &\longleftrightarrow (6,3,4) = (4)\\
(5) = (4,5,7) &\longrightarrow (3,2,5) = (3)\\
(6) = (1,5,6) &\longrightarrow (1,2,4) = (2)\\
(7) = (2,6,7) &\longrightarrow (7,4,5) = (5),
\end{aligned}$$

also:

$$(1) \longrightarrow (6) \longrightarrow (2) \longrightarrow (1),\ (3) \longrightarrow (7) \longrightarrow (5) \longrightarrow (3),\ (4) \longleftrightarrow (4).$$

Da die Fixgerade (4) den Fixpunkt 1 nicht enthält, gilt:

$$\boldsymbol{T}_{14}^{(\mathrm{II})} = \boldsymbol{T}_{14}^{(\mathrm{II})_2}.$$

Die charakteristische Inzidenzkonstellation der Fixelemente des Untertyps $\boldsymbol{T}_{\nu_1}^{(\mathrm{II})_1}$ ($\nu_1 = 1, 4, 5, 8, 11, 12$) ist also die der Abb. 3; die entsprechende kennzeichnende Inzidenzkonstellation des Untertyps $\boldsymbol{T}_{\nu_2}^{(\mathrm{II})_2}$ ($\nu_2 = 2, 3, 6, 7, 9, 10, 13, 14$) ist die der Abb. 4.

Abb. 3.

Abb. 4.

Nur der einfixpunktige Inzidenzabbildungsuntertyp $\boldsymbol{T}_{\nu_1}^{(\mathrm{II})_1}$ mit der Inzidenzkonstellation der Fixelemente der Abb. 3 *hat im Baldusschen ebenen Kollineationstyp* (VI) *ein Analogon; ein solches fehlt in der gewöhnlichen projektiven Geometrie für den einfixpunktigen Inzidenzabbildungsuntertyp $\boldsymbol{T}_{\nu_2}^{(\mathrm{II})_2}$ mit der Inzidenzkonstellation der Abb.* 4 *der Fixelemente.*

Dieser letztere Untertypus $\boldsymbol{T}_{\nu_2}^{(\mathrm{II})_2}$ stellt daher, wie der des fixpunktfreien Inzidenzabbildungstyps $\boldsymbol{T}_{\nu}^{(\mathrm{I})}$, in diesem Zusammenhang einen *charakteristischen Unterscheidungsträger* einer *endlichen* von der gewöhnlichen projektiven Geometrie dar, was, da dieser zweite Untertypus des einfixpunktigen Inzidenzabbildungstyps $\boldsymbol{T}_{\nu_2}^{(\mathrm{II})_2}$ auch in den höheren Veblensystemen $\boldsymbol{S}(13/2/4)$, $\boldsymbol{S}(21/2/5)$, $\boldsymbol{S}(31/2/6)$, ... existiert, *für die Axiomatik der* (reellen und komplexen) *projektiven Geometrie von fundamentaler Bedeutung ist*, wie ich später zeigen werde. Man hat nämlich mit den Inzidenzabbildungen das Mittel gefunden, die *für den Fragenkreis der axiomatischen Unabhängigkeit entscheidenden sog. Ausfallgeometrien systematisch unter den endlichen projektiven Geometrien der Veblensysteme* $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ *aufzufinden* (s. § 4 unter Nr. **13**).

§ 7. *Die Nichtexistenz des zweifixpunktigen Inzidenzabbildungstyps* $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{III})}$ *in* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$.

22. Als die zwei verschiedenen Fixpunkte können etwa die Punkte 1 und 2 vorgeschrieben werden. Dann wird die zweifixpunktige kollineare Beziehung der Ebene des Systems $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ auf sich mit Hilfe eines endlichen Möbiusschen Bildnetzes $\{1, 2, k', l'\}$ vorgenommen, in dem den Punkten 1, 2, 3, 6 des Ausgangsnetzes der Reihe nach die Punkte $1, 2, k', l'$ als Bildpunkte aus $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ zugewiesen werden. Dabei müssen des weiteren noch die folgenden Forderungen erfüllt werden:

1) $k' \neq 3,\ l' \neq 6$;
2) $(1, 2) \times (k', l') \neq 4,\ (1, l') \times (2, k') \neq 5,\ (1, k') \times (2, l') \neq 7$;
3) $\{1, 2, k'\}, \{2, k', l'\}, \{k', l', 1\}, \{l', 1, 2\}$ sämtlich nicht kollinear.

Wir behaupten jetzt den folgenden Satz:

Satz 14. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ *gibt es den reellen ebenen Inzidenzabbildungstyp* $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{III})}$ *mit genau zwei Fixpunkten* (zweifixpunktige Inzidenzabbildung) *nicht.*

Beweis. Der Beweis für die Nichtexistenz von $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{III})}$ in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ verläuft in folgenden Schritten:

1) Die Erfüllung der obigen Forderung 1) liefert zu $\{1, 2, 3, 6\}$ in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ *genau* die folgenden drei Bildvierecke

1. $\{1, 2, 5, 7\}$
2. $\{1, 2, 6, 3\}$
3. $\{1, 2, 7, 5\}$.

2) Für jedes dieser drei Vierecke sind die obigen Forderungen 3) einzeln erfüllt, denn:

a) $\{1, 2, 5\}, \{2, 5, 7\}, \{5, 7, 1\}, \{7, 1, 2\}$ liegen sämtlich nicht kollinear, wie die Kolonnen (2), (7), (6), (1) der Tafel zeigen.

b) $\{1, 2, 6\}, \{2, 6, 3\}, \{6, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}$ liegen sämtlich nicht kollinear, wie die Kolonnen (2), (3), (4), (1) zeigen.

c) $\{1, 2, 7\}, \{2, 7, 5\}, \{7, 5, 1\}, \{5, 1, 2\}$ liegen sämtlich nicht kollinear, wie man aus (2), (3), (5), (6) erkennt.

3) Dagegen ist für keines der drei Vierecke die erste der Forderungen 2) in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ erfüllbar, denn:

a) $(1, 2) \times (5, 7) = 4$, $\{(2)$ und $(5)\}$
b) $(1, 2) \times (6, 3) = 4$, $\{(2)$ „ $(4)\}$
c) $(1, 2) \times (7, 5) = 4$, $\{(2)$ „ $(5)\}$,

womit alles gezeigt ist.

§ 8. *Der n-fixpunktige kollineare Inzidenzabbildungstyp* $\boldsymbol{T}^{(IV)}$ *in* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$.

23. Da $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ für $n = 3$ eintritt, haben wir hier vom dreifixpunktigen kollinearen Inzidenzabbildungstyp $\boldsymbol{T}^{(IV)}$ zu sprechen.

Als die drei verschiedenen kollinearen Fixpunkte können etwa die Punkte 1, 2, 4, die kollinear auf (2) liegen, vorgeschrieben werden. Dann wird die kollineare dreifixpunktige kollineare Beziehung der Ebene des Systems $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ auf sich, mit Hilfe eines endlichen Möbiusschen Bildnetzes $\{1, 2, k', l'\}$ vorgenommen, in dem den Punkten 1, 2, 3, 6 des Ausgangsnetzes der Reihe nach die Punkte 1, 2, k', l' als Bildpunkte aus $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ zugewiesen werden. Dabei muß des weiteren noch den folgenden Forderungen Genüge geleistet werden:

1) $k' \neq 3$, $l' \neq 6$;

2) Da 4 jetzt noch als Fixpunkt vorgeschrieben ist, reduzieren sich die Forderungen 2) des § 7 hier auf:

$$(1, l') \times (2, k') \neq 5, \quad (1, k') \times (2, l') \neq 7.$$

3) $\{1, 2, k'\}$, $\{2, k', l'\}$, $\{k', l', 1\}$, $\{l', 1, 2\}$ sämtlich nicht kollinear.

Jetzt behaupten wir den folgenden Existenzsatz:

Satz 15. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ *gibt es bei vorgeschriebenen kollinearen Fixpunkten genau drei untereinander und von der Identität* $\boldsymbol{T}^{(VII)}$ *verschiedene dreifixpunktige kollineare Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}_\nu^{(IV)}$ $(\nu = 1, 2, 3)$.

Beweis. Da die obigen Forderungen 1) und 3) mit den gleichbezifferten des § 7 übereinstimmen und dort im Beweisgang des Satzes 14 als in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ erfüllt nachgewiesen wurden, so kommen hier als Bildvierecke wieder *genau* die dort angegebenen drei Vierecke in Betracht, nämlich:

1. $\{1, 2, 5, 7\}$
2. $\{1, 2, 6, 3\}$
3. $\{1, 2, 7, 5\}$,

denn gerade diese haben, als abbildungserzeugende Vierecke, wie dort unter 3) nachgewiesen wurde, noch den vorgeschriebenen Fixpunkt 4, so daß die Gerade (2) = (1, 2, 4) identisch auf sich bezogen ist. Mithin lauten die durch sie erzeugten drei dreifixpunktigen kollinearen Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}_\nu^{(IV)}$ $(\nu = 1, 2, 3)$ folgendermaßen:

$$\boldsymbol{T}_1^{(IV)} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3,\ 4 \longleftrightarrow 4,\ 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6,$$

$$\boldsymbol{T}_2^{(IV)} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3,\ 4 \longleftrightarrow 4,\ 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 5,$$

$$\boldsymbol{T}_3^{(IV)} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3,\ 4 \longleftrightarrow 4,\ 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5.$$

24. Im Anschluß hieran beweisen wir den Satz:

Satz 16. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ *erzeugt jede der folgenden, je in einer Zeile stehenden dreifixpunktigen kollinearen Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}_\nu^{(IV)}$ $(\nu = 1, 2, 3)$, *als Gruppenelement aufgefaßt, eine zyklische Gruppe* $\boldsymbol{G}_\mu^{(IV)}$ $(\mu = 1, 2, 3)$:

$$\boldsymbol{G}_1^{(IV)} : \boldsymbol{T}_1^{(IV)}$$

$$\boldsymbol{G}_2^{(IV)} : \boldsymbol{T}_2^{(IV)}$$

$$\boldsymbol{G}_3^{(IV)} : \boldsymbol{T}_3^{(IV)}$$

der Elementordnung 2.

Beweis. 1) Die von $\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{IV})}$ erzeugte zyklische Gruppe $\boldsymbol{G}_1^{(\mathrm{IV})}$ ist die folgende:

$$\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{IV})} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 3,\ 4 \longleftrightarrow 4,\ 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6$$
$$(\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{IV})})^2 = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longleftrightarrow 3, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, 7 \longleftrightarrow 7 = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.$$

2) $\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{IV})}$ erzeugt die folgende zyklische Gruppe $\boldsymbol{G}_2^{(\mathrm{IV})}$:

$$\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{IV})} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3,\ 4 \longleftrightarrow 4,\ 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 5$$
$$(\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{IV})})^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.$$

3) $\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{IV})}$ endlich erzeugt die folgende zyklische Gruppe $\boldsymbol{G}_3^{(\mathrm{IV})}$:

$$\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{IV})} = 1 \longleftrightarrow 1,\ 2 \longleftrightarrow 2,\ 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 3,\ 4 \longleftrightarrow 4,\ 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 5$$
$$(\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{IV})})^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \boldsymbol{T}^{(\mathrm{VII})}.$$

Jedes Element $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{IV})}$ ($\nu = 1, 2, 3$) ist also mit seinem *inversen* $(\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{IV})})^{-1}$ identisch.

25. Wir haben jetzt noch den folgenden Satz zu beweisen:

Satz 17. *Jede dreifixpunktige kollineare Inzidenzabbildung* $\boldsymbol{T}_\nu^{(\mathrm{IV})}$ ($\nu = 1, 2, 3$) *von* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ *besitzt auch genau drei Fixgeraden; sie gehen durch einen (Fix-)Punkt.*

Beweis. 1) $\boldsymbol{T}_1^{(\mathrm{IV})}$ bildet die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ wie folgt ab:

$$(1) = (1, 3, 7) \longrightarrow (1, 5, 6) = (6)$$
$$(2) = (1, 2, 4) \longleftrightarrow (1, 2, 4) = (2)$$
$$(3) = (2, 3, 5) \longleftrightarrow (2, 5, 3) = (3)$$
$$(4) = (3, 4, 6) \longrightarrow (5, 4, 7) = (5)$$
$$(5) = (4, 5, 7) \longrightarrow (4, 3, 6) = (4)$$
$$(6) = (1, 5, 6) \longrightarrow (1, 3, 7) = (1)$$
$$(7) = (2, 6, 7) \longleftrightarrow (2, 7, 6) = (7),$$

also:

$$(1) \longrightarrow (6) \longrightarrow (1),\ (2) \longleftrightarrow (2),\ (3) \longleftrightarrow (3),\ (4) \longrightarrow (5) \longrightarrow (4),\ (7) \longleftrightarrow (7).$$

Alle drei Fixgeraden haben den Fixpunkt 2 gemeinsam.

2) Vermöge $\boldsymbol{T}_2^{(\mathrm{IV})}$ gehen die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ wie folgt ineinander über:

$$(1) = (1, 3, 7) \longrightarrow (1, 6, 5) = (6)$$
$$(2) = (1, 2, 4) \longleftrightarrow (1, 2, 4) = (2)$$
$$(3) = (2, 3, 5) \longrightarrow (2, 6, 7) = (7)$$
$$(4) = (3, 4, 6) \longleftrightarrow (6, 4, 3) = (4)$$
$$(5) = (4, 5, 7) \longleftrightarrow (4, 7, 5) = (5)$$
$$(6) = (1, 5, 6) \longrightarrow (1, 7, 3) = (1)$$
$$(7) = (2, 6, 7) \longrightarrow (2, 3, 5) = (3),$$

also:

$$(1) \longrightarrow (6) \longrightarrow (1),\ (2) \longleftrightarrow (2),\ (3) \longrightarrow (7) \longrightarrow (3),\ (4) \longleftrightarrow (4),\ (5) \longleftrightarrow (5).$$

Alle drei Fixgeraden haben den Fixpunkt 4 gemeinsam.

3) Durch $\boldsymbol{T}_3^{(\mathrm{IV})}$ endlich werden die Geraden von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ folgendermaßen ineinander übergeführt:

$$(1) = (1, 3, 7) \longleftrightarrow (1, 7, 3) = (1)$$
$$(2) = (1, 2, 4) \longleftrightarrow (1, 2, 4) = (2)$$
$$(3) = (2, 3, 5) \longrightarrow (2, 7, 6) = (7)$$
$$(4) = (3, 4, 6) \longrightarrow (7, 4, 5) = (5)$$
$$(5) = (4, 5, 7) \longrightarrow (4, 6, 3) = (4)$$
$$(6) = (1, 5, 6) \longleftrightarrow (1, 6, 5) = (6)$$
$$(7) = (2, 6, 7) \longrightarrow (2, 5, 3) = (3),$$

also:

$$(1) \longleftrightarrow (1),\ (2) \longleftrightarrow (2),\ (3) \longrightarrow (7) \longrightarrow (3),\ (4) \longrightarrow (5) \longrightarrow (4),\ (6) \longleftrightarrow (6).$$

Alle drei Fixgeraden haben den Fixpunkt 1 gemeinsam.

Die charakteristische Inzidenzkonstellation der Fixelemente der $\boldsymbol{T}_{\nu}^{(\mathrm{IV})}$ $(\nu = 1, 2, 3)$, die man wegen Nr. **23—25** auch *involutorisch* nennen könnte, ist also die der Abb. 5.

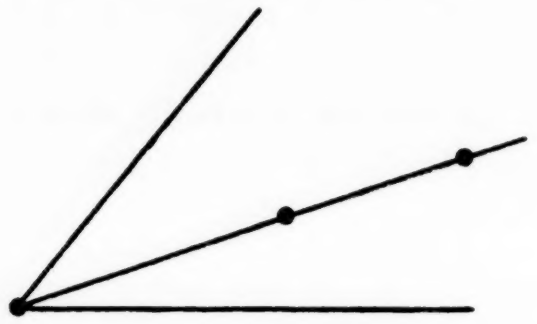

Abb. 5.

Dieser Inzidenzabbildungstypus hat den Baldusschen ebenen Kollineationstyp (V) als Analogon, also die sog. zentrale Kollineation mit dem Kollineationszentrum auf der Kollineationsachse.

§ 9. *Die Nichtexistenz des dreifixpunktigen Inzidenzabbildungstyps* $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{V})}$ *in* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$.

26. Als die drei verschiedenen, nichtkollinearen Fixpunkte können etwa die Punkte 1, 2, 3 vorgeschrieben werden. Dann wird die dreifixpunktige kollineare Beziehung der Ebene des Systems $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ auf sich mittels eines endlichen Möbiusschen Bildnetzes $\{1, 2, 3, l'\}$ vorgenommen, in dem den Punkten 1, 2, 3, 6 des Ausgangsnetzes der Reihe nach die Punkte 1, 2, 3, l' als Bildpunkte aus $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ zugewiesen werden.

Dabei müssen überdies noch die folgenden Forderungen erfüllt werden:

1) $l' \neq 6$;

2) $(1, 2) \times (3, l') \neq 4,\ (1, l') \times (2, 3) \neq 5,\ (1, 3) \times (2, l') \neq 7$;

3) $\{1, 2, 3\}, \{2, 3, l'\}, \{3, l', 1\}, \{l', 1, 2\}$ sämtlich nicht kollinear.

Wir behaupten jetzt den Satz:

Satz 18. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ *gibt es den reellen ebenen Inzidenzabbildungstyp* $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{V})}$ *mit genau drei nicht kollinearen Fixpunkten* (dreifixpunktige Inzidenzabbildung) *nicht.*

Beweis. Die Nichtexistenz von $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{V})}$ in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ liegt daran, daß die zweite der obigen Forderungen 2), also

$$(1, l') \times (2, 3) \neq 5,$$

wegen der Definition von $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ durch die Tafel der Abb. 1 nicht erfüllbar ist, da die Gerade $(2, 3) = (3)$ definitionsgemäß den Punkt 5 enthält.

§ 10. *Die Nichtexistenz des* $(n+1)$*-fixpunktigen kollinearen Inzidenzabbildungstyps* $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{VI})}$ *in* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$.

27. Da $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ in $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)$ für $n = 3$ eintritt, haben wir hier vom vierfixpunktigen kollinearen Abbildungstyp $\boldsymbol{T}^{(\mathrm{VI})}$ zu sprechen.

Als identisch auf sich bezogene Gerade kann hier etwa die Gerade $(2) = (1, 2, 4)$, als der mit ihr nicht inzidierende weitere Fixpunkt etwa der Punkt 3 vorgeschrieben werden.

Dann wird die vierfixpunktige kollineare Beziehung der Ebene des Systems $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ auf sich mit Hilfe eines endlichen Möbiusschen Bildnetzes $\{1, 2, 3, l'\}$ vorgenommen, in dem den Punkten 1, 2, 3, 6 des Ausgangsnetzes der Reihe nach die Punkte 1, 2, 3, l' als Bildpunkte aus $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ zugewiesen werden. Dabei müssen überdies noch die folgenden Forderungen erfüllt werden:

1) $l' \neq 6$;

2) $(1, l') \times (2, 3) \neq 5$, $(1, 3) \times (2, l') \neq 7$.

3) $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, l'\}$, $\{3, l', 1\}$, $\{l', 1, 2\}$ sämtlich nicht kollinear.

Wir behaupten dann den Satz:

Satz 19. *In der endlichen projektiven Geometrie des Veblensystems* $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ *gibt es den reellen ebenen Inzidenzabbildungstyp* $\boldsymbol{T}^{(VI)}$ *mit genau vier Fixpunkten, von denen drei kollinear liegen* (vierfixpunktige kollineare Inzidenzabbildung), *nicht.*

Beweis. Der Beweis für die Nichtexistenz von $\boldsymbol{T}^{(VI)}$ in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ könnte wörtlich genau so wie derjenige des Satzes 18 geführt werden. Eine andere Beweisführung ist die folgende:

Da nach Voraussetzung hier die Inzidenzbeziehung

$$(1, 2) \times (3, l') = 4$$

gilt, so kann damit (diese Beziehung als „geometrische Gleichung" aufgefaßt) in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ (wegen **A. 1***, **A. 2***) l' aus $(3, l', 4) = (4)$ kollinear „errechnet" werden und dies auf eine und nur eine Art, also eindeutig. Es ergibt sich unmittelbar aus der Tafel:

$$l' \equiv 6.$$

Daraus folgt aber, daß die obige Forderung 1) in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ nicht erfüllbar ist.

§ 11. *Vollständigkeit. Gruppentheoretische Ausblicke.*

28. Weil bei allen Ableitungen und Beweisen der vorstehenden Paragraphen immer *vollständige Disjunktionen* verwendet wurden, folgt aus diesen Ableitungen gleichzeitig die *Vollständigkeit der gegebenen Lösung* und ein Vollständigkeitsbeweis braucht nicht mehr gesondert geführt zu werden.

29. Eine rein gruppentheoretische Untersuchung der im I. Kapitel dieser Arbeit hier erstmals und ganz allgemein für jedes Veblensystem $\boldsymbol{S}(n^2 - n + 1/2/n)\,[n = 3, 4, 5, \ldots]$ definierten Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$, die also von jeder Deutung und Bedeutung der Gruppenelemente $\boldsymbol{T}$ (also von der Darstellung der Gruppe) abstrahiert, würde bei Benützung der bekannten Sätze, daß jede Untergruppe einer zyklischen Gruppe ebenfalls zyklisch ist, und daß ein Teilsystem von Elementen einer endlichen Gruppe stets dann eine Untergruppe bildet, wenn das Produkt zweier beliebiger Elemente desselben wieder im System liegt [Kriterium für Untergruppen], leicht den Nachweis erbringen können, *daß diese Inzidenzabbildungen* $\boldsymbol{T}$ *in ihrer Gesamtheit eine endliche Gruppe bilden* (deren Ordnung sich leicht angeben läßt (vgl. auch a. a. O. [13]), Satz 57), *von der die zyklischen Gruppen der Typen von* $\boldsymbol{T}$ (eigentliche) *Untergruppen sind*, die zum Teil *abelsch* sind, und deren Auffindung von A. Speiser als eine der Hauptaufgaben der Gruppentheorie (a. a. O. [13]) S. 15) bezeichnet wird. (Z. B. können die im Kap. II. dieser Arbeit in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ aufgefundenen zyklischen Gruppen $\boldsymbol{G}_\mu^{(II)}$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots, 7)$ der $\boldsymbol{T}_\nu^{(II)}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 14)$ und die zyklischen Gruppen der $\boldsymbol{G}_\mu^{(IV)}$ $(\mu = 1, 2, 3)$ der $\boldsymbol{T}_\nu^{(IV)}$ $(\nu = 1, 2, 3)$ leicht durch Produktbildung aus den zyklischen Gruppen $\boldsymbol{G}_\mu^{(I)}$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots, 8)$ der $\boldsymbol{T}_\nu^{(I)}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots, 48)$ abgeleitet werden, was geometrisch bedeutet, daß der Typus $\boldsymbol{T}^{(II)}$ und $\boldsymbol{T}^{(IV)}$,

der neben $\boldsymbol{T}^{(I)}$ in $\boldsymbol{S}(7/2/3)$ allein existiert, aus dem fixpunktfreien Inzidenzabbildungstypus $\boldsymbol{T}^{(I)}$ gewonnen werden kann.)

30. Doch war eine solche rein gruppentheoretische Betrachtung nicht unsere Absicht; uns ging es vielmehr um die hier obwaltende *geometrische* und *geometrisch-axiomatische* Sinnhaltigkeit der Inzidenzabbildungen $\boldsymbol{T}$. Daß wir dabei aus beweistechnischen Gründen auch gruppentheoretische Methoden herangezogen haben, kann uns gewiß nicht zum Vorwurf gemacht werden; dies um so weniger, wie uns scheinen will, als wir dabei auf ganz natürlichem Wege eine einfache *geometrische* und *geometrisch-axiomatische Deutung der zyklischen Gruppen* aufgewiesen haben.

Eingegangen 17. Januar 1938.